علم الحساب عند العرب

احمد سليم سعيدان *

كان الاغريق يقسمون علم الحساب الى قسمين : **ارثماتيكا ولوجستيكا** . اما الارثماتيكا فتتناول اصناف الاعداد من فردية وزوجية ، واولية ومركبة ، وناقصة وتامة وزائدة ومتحابة الخ . . ، كما تتناول ترتيب الاعداد في متواليات ، الى غير ذلك مما يمكن أن نعتبره فصولا اولية فى نظرية الاعداد . **وكتاب أقليدس المشهور ليس كما يظن البعض كتابا فى الهندسة بل ان أجزاء منه فى الارثماتيكا** . لقد استهدف **اقليدس أن** يجمع خلاصة المعرفة الرياضية فى وقته (حوالى ٣٠٠ قم) ويعرضها في نظام منطقى رصين مبنى بعضها فوق بعض ، وقد جعل كتابه في ١٣ جزءا فكانت اجزاؤه ٢،٥، ١٠،٩،٨،٧ كلها أو جلها فى نظرية الاعداد وما اليها . ولقد اضاف الى هذه المعرفة من خلفوا اقليدس ، ولعل كتاب **نيقوماخس الجرشى** (حوالى ١٠٠م) اوفى ما كتب عن نظرية الاعداد حتى العصر الاسلامى . وكما بحث الاغريق فى نظرية الاعداد فقد بحث الهنود على طريقتهم ، لاسيما في المتواليات والتحليل التوافيقى ، وربما كان بعض ما ذكره الاغريق والهنود قد عرفه من قبلهم البابليون .

ومهما يكن من امر فاننا نستطيع القول ان البحث في الاعداد وخصائصها لم تنقطع حباله على مر العصور ، ولا ينطبق ذلك على اللوجستيكا ، وكان الاغريق يقصدون بها فن اجراء العمليات الحسابية ، ويرون هذا أمرا له من الاهمية ما يستلزم تعليمه للاطفال ولكنه لا يرتفع الى مستوى العلم الذى يعنى به الكبار ، ومن ثم لم يكتب الاغريق عن اللوجستيكا ولعلهم لم يحاولوا تطويرها . وربما كان هذا اتجاها عاما ، ولعله ساد حتى بدء النهضة العلمية الاسلامية ، فنحن نتقصى ما كتب عن

---

* الدكتور احمد سليم سعيدان استاذ تاريخ العلوم في الجامعة الاردنية ساهم في المجهود الذى يبذل تحت اشراف اليونسكو لتطوير الرياضيات وطريقة تدريسها . نشر بحوثا فى تاريخ الرياضيات عند العرب .

العمليات الحسابية على مر العصور فتطالعنا اول الامر لفافات البردى التى كشفت لنا كيف كان المصريون يجرون هذه العمليات . وهذه اللفافات ترجع كلها الى عصر المملكة الوسطى (٢١٦٠ ـ ١٧٨٨ق م) ثم ينقطع أمامنا الاثر . حتى الالواح البابلية فيها ارثماتيكا وجبر ولكن ليس فيها لوجستيكا . فاذا جئنا الى العصر الاسلامى نجد المصادر العربية تذكر ان **محمد بن موسى الخوارزمي** اول من كتب في الحساب الهندى (حوالى ٨٢٥م) وانه وضع كتابا في الجمع والتفريق .

وما كتبه الخوارزمي فى الحساب فقد أصله العربى ، ولكنه انحدر الينا في مخطوطات لاتينية هى تراجم او خلاصات لما كتب في الحساب الهندى . ولقد كان يظن أن كتاب الخوارزمي في الجمع والتفريق هو نفسه كتابه فى الحساب الهندى الى ان اتيح لنا دراسة كتاب التكملة فى الحساب **لابى منصور عبد القاهر بن طاهر البغدادى** ، المتوفى سنة ١٠٣٧م (المخطوطة ٢٧٠٨ فى مكتبة لالى) فوجدنا المؤلف يقتبس فقرات من كتاب الجمع والتفريق للخوارزمي ، وهذا الفقرات تدل على أن الكتاب لم يكن في الحساب الهندى بل كان في الحساب التقليدى الشائع في ذلك العهد. وبعد الخوارزمي توالت الكتب العربية بعضها في الحساب الهندى وبعضها فى الحساب التقليدى ، وكلها تنصب فى الدرجة الاولى على عرض طرق اجراء العمليات الحسابية . ثم قام المترجمون بنقل ما وصل الى أيديهم من الفكر الرياضى الاغريقى والهندى ، فوجدت نظرية الاعداد طريقها الى الفكر العربى، وقام العرب بدورهم المرسوم في جمع اشتات المعلومات شرقيها وغربيها ومحاولة التأليف بينها وتنظيمها ثم تطويرها وتوسيعها ، وكان من حصيلة ذلك علوم الحساب والجبر والمثلثات المستوية والكروية التى تناولها الغرب في مطلع النهضة الاوروبية وعكف على دراستها حتى اتيح له أن يبدأ دوره في تطويرها وتوسيعها فى القرن السابع عشر . لقد قام علم الحساب العربي على اركان ثلاثة هى : الحساب التقليدى الذى اشرنا اليه ، والحساب الهندى ونظرية الاعداد الاغريقية .

اولا : الحساب التقليدى

غنى عن البيان ان الفتح الاسلامى لم يأت بجديد فى علم الحساب او فن العمليات الحسابية . فالفاتحون الذين ابقوا لغة الديوان (اى سجلات الدولة) رومية في الشام فارسية في العراق حتى تم تعريب الديوان **الفارسي** فى ايام **الحجاج ، والرومى** فى عهد عبد الملك (او ابنه **هشام** ، تركو الحسّاب ايضا يعملون كما عرفوا والفوا . ولنا ان نقدر ان هذا الذى عرفه الحسّاب هو ما ترسب عبر الزمان من مأثور بابلى كلدانى وفرعونى واغريقي، عبوراً بوسطين فارسى وبيزنطى . واذا ذكرنا أن البقاع التي صرنا نطلق عليها اسم ديار الاسلام مرت قبل الفتح الاسلامى بفترة من الركود الذهنى تربو على قرنين لم تنجب فيهما مفكرا يحفظ اسمه التاريخ ـ اذا ذكرنا ذلك فقد نقدر ايضا ان هذا المأثور الحسابى لم يزد عما تقتضيه شئون الحياة من قواعد عملية لايمكن الاستغناء عنها . وهذه التقديرات يؤيدها بوجه عام ما وصل الينا من مخطوطات فى هذا النظام الحسابي . وقد تقدم ان كتاب الجمع والتفريق للخوارزمي مفقود الا من مقتبسات منه نجدها في كتاب التكملة لابن طاهر ، وكذلك فقدت مخطوطات اخرى كثيرة . واقدم ما بقى لنا منها كتاب « ما يحتاج اليه الكتاب والعمال من صناعة الحساب » **لابى الوفاء البوزجانى** ، من علماء القرن العاشر الميلادى والكتاب بسبعة اجزاء يسميها المؤلف منازل ، نجد المنازل الثلاث الاولى منها كاملة في مخطوطة ليدن (Or. 103) ونجد الباقى في مخطوطة القاهرة (رياضة ٤٢ م) التى تضم الكتاب ابتداء من اوائل المنزلة الثانية عدا فصول فى أواخر المنزلة السادسة واوائل السابعة . وقد

نشر ميدوفى Medovoi بالروسية دراسة قيمة لهذا الكتاب فى
Istoriko Matematisheskie Isseldovaniya
المجلد ١٣ (١٩٦٠) الصفحات ٢٥٣ – ٣٢٤ (١)

ولقد كان مؤلف الكتاب من اكبر العلماء الفلكيين والرياضيين فى عصره ، وقد وضعه لموظفى الدولة ليعلمهم القواعد الصحيحة لاجراء العمليات الحسابية ، وهو يذكر انهم درجوا على استعمال قواعد باطلة لايؤيدها البرهان ولا تخلو من غبن يلحق الدولة أو الرعية . فالكتاب من ثم على جانب كبير من الاهمية لانه يكشف لنا جوانب مجهولة من النظام الادارى فى القرن العاشر الميلادى . ولكنه رغم ضخامته لا يتناول بحث الجبر الذى هو فصل اساسى من فصول هذا النظام الحسابى ، لان المؤلف أفرد للجبر كتابا مستقلا (لم يصل الينا مع الاسف) . على انه وصل الينا كتاب آخر أوجز واوفى من كتاب أبى الوفاء اذ يضم مادة الجبر هو « الكافى فى الحساب » **لأبى بكر محمد بن الحسن (وفي رواية الحسين) الكرجى المعروف خطأ بالكرخى** (توفى سنة ١٠١٩ أو ١٠٢٩ م) وهو في المخطوطة ٨٥٥ في مكتبة دامات ابراهيم باشا . ولم يكن الكرجى رياضيا كبيرا كأبي الوفاء ، وكتابه لايخلو من اخطاء بعضها لا يمكن أن يكون من اخطاء النساخ ، ولكن يبدو أن صغر حجمه جعله اوسع انتشارا بدليل أنه ظل يستعمل وظلت تكتب عنه الشروح حتى أواخر العهد الاسلامى ، ومن هذه الشروح كتاب « الشرح الشافى لكتاب الكافى » **لمحمد بن على بن احمد الشهرزورى (القرن ١٢ م)** فى المخطوطة ٨٠١ فى مكتبة ينى جامع) .

وكما يشكو ابو الوفاء من أن الحسّاب يستعملون قواعد تقليدية خاطئة فكذلك يشكو الكرجي والشهرزورى . وربما كان كتاب « الكافية » **لأحمد بن على بن عمر بن صالح الاربلى (القرن ١٢ م)** مثالا على هذا المستوى من الحساب وهو فى المجموعة ٣٤٤١ فى مكتبة أحمد الفاتح (١٢٨ ظ – ٢٤٥ ظ)

وتدل المخطوطات على أن الموروث الحسابي الذى تناوله المسلمون ممن سبقهم قبل عهد الترجمة كان نظامين لا واحدا ، أحدهما سماه العرب حساب المنجمين لأنه كان يقتصر استعماله على الفلكيين ، كما سموه حساب الزيج وحساب الدرج والدقائق . اما الآخر فقد كان اسمه علم الحساب بدون تمييز ، ولكن حيث يلزم التمييز يسمونه حساب اليد أو الحساب الهوائى أو حساب العقود أو حساب الروم والعرب . ولننظر في خصائص كل من هذين النظامين :

١ – حساب المنجمين :

يقوم هذا النظام على أساس العدّ الستينى ويلعب فيه العدد ٦٠ ما تلعبه العشرة فى نظامنا العشرى ، فكما ان ٧٥٨ مثلا تعنى ٨ (١٠)٠ + ٥ (١٠)١ + ٧ (١٠) ٢ فذلك ٢٣و٤٤و١٥ مثلا في النظام الستينى قد تعنى ٢٣ (٦٠) ٠ + ٤٤ (٦٠)١ + ١٥ (٦٠)٢ ، ولكن نظرا لعدم استعمال ما يشير الى المنازل الخالية فى الاطراف يعنى التركيب السابق بوجه عام ٢٣ (٦٠)ن + ٤٤ (٦٠) ن+١ +١٥ (٦٠) ن+٢ ، فاذا اعتبرنا أن العدد ١٥ يشير الى درجات فان ٢٣و٤٤و١٥ يعنى ١٥ درجة و٤٤ دقيقة و٢٣ ثانية . والنظام بابلى الاصل ، استعمله البابليون على الصورة التى قدمنا ، وقد يكون قد استعمله من قبلهم السومريون . وهم قد استغنوا به عن معالجة الكسور ، ومن اجله جعلوا وحدات القياس عندهم على سلم ستينى . ولكن رغم تفوقهم في الرياضيات لم يخطر لهم أن يستعملوا اشارة كالصفر تملأ المنازل الخالية ، فاذا خلت

(١) اعددنا للكتاب نسخة محققة مع مقدمة وتعليقات مبنية على مقارنة مادته بما نجده فى مخطوطات اخرى ، وسندفع بذلك الى المطبعة عما قريب .

منزلة بين أرقام العدد فقد يتركون لها فراغا (وقد لا يتركون) .

ولقد أخذ الافريق هذا النظام عن البابليين . وكان للبابليين اشارتان مسماريتان احداهما للواحد يكررونها مرتين للاثنين ... وتسع مرات للتسعة ، والاخرى للعشرة يكررونها مرتين للعشرين ... وخمسا للخمسين ، فاذا جاءوا الى الستين كتبوها على صورة الواحد (في المنزلة الاعلى) كما تكتب العشرة واحدا فى المنزلة الثانية . اما الافريق فقد اغفلوا الكتابة المسمارية وعبروا عن الاعداد بحروف من ابجديتهم ثم ادخلوا تعديلا آخر هاما هو أن استعملوا الاشارة o لتملأ المنزلة الخالية وهي في الكتابة باليد قد تتخذ اشكالا اخرى مثل δ أو ō . الا أن الافريق أخذوا بالنظام الستينى للتعبير عن الكسور وابقوا الصحاح على نظام عشرى ، فقد يكتبون ٣٠و١٥و٣١٥ ويعدون بذلك ٣١٥ و $\frac{١٥}{٦٠}$ و $(\frac{٣٠}{٦٠})^{٢}$ (أى ٣١٥و١٥ دقيقة و٣٠ ثانية) .

وهذا النظام نفسه وصل الى العرب واستعملوه فى جداولهم وحساباتهم الفلكية ، وهم استعملوا الحروف العربية بالترتيب الأبجدى للدلالة على الارقام على الصورة التالية :

الحرف	أ	ب	ج	د	ه	و	ز
الدلالة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الحرف	ح	ط	ى	ك	ل	م	ن
الدلالة	٨	٩	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠

فاذا ارادوا أن يكتبوا ٩ أو ١٩ أو ٥٩ كتبوا ط أو يط أو نط (بالابتداء دائما بالمنزلة العليا) . واذا أرادوا أن يشيروا الى ١٥ درجة و ٤٤ دقيقة و ٢٣ ثانية كتبوا يه مد كج اما يه مد ō كج فتعنى ١٥ درجة و٤٤ دقيقة و٢٣ ثانية . وهذا بلا استثناء هو ما نجده فى الجداول الفلكية وما شابهها مثل جداول خطوط الطول والعرض مثلا . ولكن في مثل جداول خطوط الطول والعرض ، حيث قد يزيد العدد الصحيح على ٥٩ فهنا يتبع الحاسب احد ترتيبين :

١ ـ فاما أن يحافظ على السلم الستيني فى الاعداد الصحيحة فيكتب يا يب مثلا ليشير الى ١١ × ٦٠ + ١٢ وفي هذه الحالة لايحتاج من الحروف الابجدية للدلالة على الاعداد الى اكثر مما تقدم . وتسمى المنازل التى فوق منزلة الدرجات بالمرفوعات ، فمرفوع أول وثان وثالث (او مثانى ومثالث) الخ تقابل ٦٠، ٢٦٠، ٣٦٠ الخ .

٢ ـ واما أن يبقى الاعداد الصحيحة على النظام العشرى ، كما فعل الاغريق ، وهنا يلزم أن يستعمل حروفا اخرى للدلالة على ٦٠، ٧٠ الخ فيستعمل باقى الحروف الابجدية على النظام الآتي (٢) .

الحرف	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش
الدلالة	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
الحرف	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
الدلالة	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠	١٠٠٠

وهنا ايضا يكتب الاعداد مبتدئا بالمنزلة العليا ، فاذا أراد أن يكتب ١١١ كتب (قيا) واذا اراد أن يكتب ١١١١ كتب غقيا ، أما ٢١١١ فتكتب بفقيا حيث بغ تشير الى الألفين .

وهكذا كان الفلكى والحاسب يستطيعان أن يرمزا الى اى عدد صحيح وأى كسور ستينية بحروف من الابجدية العربية . فكيف كانا يجريان العمليات الحسابية ؟

ليس لدينا مخطوطات تبين كيف كانت

---

(٢) هذا هو النظام السائد فى الشرق الاسلامي ، اما فى المغرب فنجد اختلافا جزئيا نظرا لان المغاربة يرتبون الابجدية ترتيبا يغاير ماجرى عليه الحال فى المشرق ، بعض المغايرة .

العمليات تجرى قبل دخول الحساب الهندى الى المنطقة الاسلامية . ولكن مالدينا من كتب في الحساب الهندى تكاد كلها تتصدى لتطبيق العمليات الهندية على النظام الستينى واطرفها من حيث ما نحن بصدده كتاب «اصول حساب الهند» **لكوشيار ابن لبان الجيلى** (القرن ١٠/١١ م) في المخطوطة ٤٨٥٧ في مكتبة جامع ايا صوفيا ، وقد نشرها ليفى وبتروك فى كتاب : Principles of Hindu Reckoning (مطبعة جامعة وسكنسن ، ١٩٦٥) الا أن الناشرين لم يكونوا موفقين فى فهم معانى بعض العبارات العربية .

والكتاب بمقالتين يعرض كوشيار في اولاهما معالجة الاعداد الصحيحة بالنظام الهندى ويعرض فى الثانية معالجة الكسور الستينية معبرا عنها برموز هندية ، ولكنه يحافظ على بعض طرق الفلكيين فى معالجة هذه الكسور .

وكتاب « التكملة » لابن طاهر ذو قيمة كبيرة من هذه الناحية فهو يعرض الانظمة الحسابيه المختلفة كلاً على حدة فيجعل للحساب الهندى نظامين أحدهما للاعداد الصحيحة والآخر للكسور ، ويجعل حساب الزيج نظاما وحساب اليد نظاما آخر . الا أن ابن طاهر يعطي هذه الانظمة في وقت كانت فيه قد تاثرت بالنظام الهندى الى حد كبير .

من هذه النصوص نستنتج ما يلي :

١ ــ يبدو أن النظام الستيني لا يتضمن طريقة بينة لاجراء عمليتي الجمع والطرح ، لسهولتهما ، وربما كانتا تتمان عقليا .

٢ ــ تجرى عمليتا الضرب والقسمة بالاستعانة بجدول للضرب يمتد من ١×١ الى ٦٠×٦٠ على النظام الستيني ويكتب عادة في ستين صفحة يفرض أن تكون تحت متناول يد الحاسب ، هذا مع الاعتماد على مبدأين يعبر عنهما بالشكل :

٦٠ م × ٦٠ ن = ٦٠ م + ن (١)

٦٠ م ÷ ٦٠ ن = ٦٠ م − ن (٢)

فلنضرب ٣٠و٢٤ فى ٤٨و٤٨و١٥ مثلا يضرب كل من ٢٤ ، ٣٠ في كل من ١٥ ، ٤٨ فتعين منزلة الحاصل من القانون (١) ويؤخذ رقمه من الجدول وتجمع النتائج الاربع . وشبيه بهذا ما يحدث في القسمة .

٣ ــ يعرض كوشيار طريقة لايجاد الجذر التربيعي واخرى لايجاد الجذر التكعيبي في النظام الستيني ولكن يحتمل ان ما يصنعه هنا انما هو بالاستناد الى طرق الحساب الهندى وان النظام الستيني في عهده لم يكن يعطي طريقة بينة لاستخراج الجذور عدا التقريب القائم على الحدس والتجربة .

وقد نجد من الادلة ما يبعث على الاعتقاد بأن الحسّاب كانوا على الغالب لا يجهلون التعبير عن الاعداد بالحروف ، وقد نجد الباحثين الذين توفروا على دراسة تاريخ الفلك في العصور القديمة والوسطى يؤكدون ان النظام الستيني يتمشى مع الرياضيات الفلكية اكثر من النظام العشرى . ولكن الدلائل تشير الى ان هذا النظام لم يكتب له ان ينتشر فى غير أوساط الفلكيين ، وربما كان ذلك لأنه كان يقتضي تحويل العدد الطبيعي من النظام العشرى الى الستيني وربما لأنه كان يتطلب جدولا في الضرب جرت العادة دون مبرر على ان يكتب في ستين صفحة .

ومهما يكن من امر فقد كان النظام الستيني نظام الخاصة من الرياضيين ، اما النظام الشعبي الذى لجا اليه الحاسب ورجل الشارع فهو حساب اليد .

ب ــ حساب اليد :

ابرز سمات هذا الحساب انه لا يشتمل على اى نظام رمزى للدلالة على الاعداد فهي تعطى

باسمائها كاملة ، فيقول الحاسب ويكتب : اضرب ثلاثة آلاف واربعمائة وثمانية فى مائتين واربعة عشر .

ومن سماته ان العمليات تجرى عقليا . اما عمليتا الجمع والطرح فلا نجد وصفاً لهما لسهولتهما . واما الضرب فيقتضي : أ. حفظ جدول الضرب من ١×١ الى ٩×٩ ب. حفظ قاعدة ضرب المنازل : مثلا : عشرات في مئات تعطي الوفا . وهذا يقابل القانون (١٠) م × (١٠) ن = (١٠) م + ن .

فلضرب اى عددين كالعددين السابقين (٣٤٠٨×٢١٤) يلاحظ الحاسب ان اولهما من ثلاث منازل : آحاد ومئات والوف ، وان الثاني من ثلاث منازل ايضا : آحاد وعشرات ومئات ، فيجب اجراء ٣×٣ أى ٩ عمليات ضرب ، فيجرى هذه العمليات التسع ويجمع الحواصل تدريجيا :

ثلاثة آلاف في مائتين : ستمائة الف ، ثلاثة آلاف في عشرة : ثلاثين الفا ، ... الخ . ويحتاج الحاسب في غضون العملية ان يتذكر النواتج الجزئية التى حصل عليها : مثل ستمائة الف أو ستمائة وثلاثين الفا ، فماذا يصنع ؟ هل يكتب هذه النواتج ؟ في بعض طرق الضرب التى يقترحها ابو الوفاء ما يدل على ان الكتاب كانوا فعلاً يكتبون النواتج فى بعض العمليات المعقدة ولكن على غير نظام مقرر فهو من ثم يؤكد ضرورة السير على نظام . ولكن الطريقة العامة التى يتميز بها حساب اليد والتى من اجلها اكتسب اسمه هذا ، كما سمي ايضا « بحساب العقود »، هي ان الحاسب كان يعقد اصابعه باشكال متفق عليها يتميز بعضها عن بعض للدلالة على الاعداد .

والمخطوطات العربية تتكلم عن هذه العقود لكنها لا تذكر كيف نعقد الاصابع للدلالة على الواحد مثلا أو العشرة أو سواهما ، باعتبار ذلك امرا معروفا لدى القارىء . ولكن الكتب البيزنطية تفصل امر هذه العقود ، وفي كتاب

Smith, D. E., History of Mathematics, (Vol. 11, Boston, 1925).

يذكر المؤلف نبذة عن تاريخ حساب اليد (Finger reckoning) ويشير الى مؤلفات لاتينية تصف العقود ثم يعطي في الصفحة ١٩٩ صورا لهذه العقود كما وصفها باتشيولي فى كتاب وضعه سنة ١٤٠٤ . ولدينا في العربية نص واحد (على ما اعلم) هو منظومة فى المجموعة ١٠٨٨ فى المكتبة العمومية ، لعلي بن المغربي نورد منها هنا ما يختص بهذه العقود :

باب عقد الآحاد :

اعلم بأن عقدك الآحادا
خصوا بها ثلاثة افرادا

فخنصر وبنصر ووسطا
وذاك في اليمين فاعرف ضبطا

فواحد : ابسط يديك واخصر
وركب الخنصر فوق البنصر

وضم فى الاثنين من كليهما
من غير تغيير لذاك فاعلما

وكف ان أردت ان تثلثا
وسطاك مع كليهما ان مكثا

واعمد الى الخنصر حسب فارفع
فما تبقى فهو عقد الأربع

ثم اكفف الوسطى لعقد الخامس
فردا ، كذا البنصر عقد السادس

كذلك الخنصر فى التتابع
فاكففه فردا عند عقد السابع

واكفف لدى الثامن عقد الخنصر
وازوجه في العقد بكف البنصر

هذا وفى التاسع فالحق بهما
وسطاك واعرف ما اقول وافهما

• • •

والقول فى الآحاد قد شاها
وفيه ما يشتبه اشتباها

فافهــم فاني ذاكـر يا سامعـــي
مــا الفـرق بـين ثالث وتاســع
ايضـــا وبـين ثامــن وثانـــي
ملخصـــا في العقـــد بالبيـــان
والفـرق فى ذلك وضـع الخنصر
فى عقـدك الاثنين فـوق البنصـر
وهكـــذا الثالـــث يـاذا الأرب
ركـــب والتاسـع لـم يركـب

• • •

باب عقد العشــرات :

والعشــــرات يا اخـــا النجابـة
خصـوا بهـا الابهـام والسـبابـة
وتلـك ايضـا منـك فى اليمـــين
فكـن مـن الضبـط عـلى يقـين
واعلــم اذا اردت عقـد العشـــرة
فانهـــا كجامـــة مـــدورة
وضــع لدى العشرين ابهـام اليد
في العقــد تحت اصبـع التشهـد
لكـي يكـون منـه فـوق عقدتـه
مشـــاركا وسطاك في انملتـــه
واضمم بهـا عنـد الثلاثين تـرى
كقابض الابـرة من فـوق الثـرى
واعطف عـلى الســبابة الابهامـا
فى الأربعـين واعطـف الكـلاما
ثم اكفف الابهـــام عقـدا وحـده
وذاك في الخمسـين فاعـرف حـده
واردفه فى الســتين بالســبابة
كقبضـة الرامـي عـلى النشـابـه
ومثل الســبعين عنـد العقـد
كناقـف الدينـار عنـد النقـد
والأصبعـــان فى الثمانـــين همـا
قـد لصقـا في العقـد مـع بسطهما
(٣) وهي بعقـد الأربعـين أنسـب
لكنمـــا الابهـــام لا يركـــب

والفـــرق بين عقـدها والعشـرة
بأنهـــا مضمومـــة مخصـــرة

• • •

والعشرات قـد تناهـى حدهـا
وعقـــدها وضبطهـــا وحدهـــا
وهي لدى العقـد على انفرادهـــا
لا تمنـع التكميـل مـع آحـادها
قـد شبهـوا قبض يـد الضنـين
في شـكلها بالتسـع والتسعـين

• • •

باب عقد المئات

ثم اعقـد المئـات فى الشمـــال
كالعشـرات فاستمـع مقالـــي
اعلـم بأن شـكلها كشكلهـــا
وأصلهـا فـي عقـدها كأصلهـا
تشكيـــل تلـك فى انقسامهـــا
سـبابـة الشمـال مـع ابهـامهـا
فالمائة الأولـى تحاكـي العشـــرة
فقـس عـلى ذلـك يـاذا المخبرة
والمئتـــان تشبـــه العشرينـــا
فافهـم فقـد بينتـه تبيينـــا

• • •

باب عقد الألوف

ثم اعقد الالـــوف كالآحــــاد
في يـدك اليسـرى عـلى انفـــراد
اقسامهـــا ثلاثـــة مقـــدرة
وسطـاك والخنصـر يتلـو بنصره
تركيبهـــا ان كنت ممـن يعـرف
كعقـــدك الآحـــاد لايختلـــف

• • •

ثم اذا ساقـــك العـدُ الـــى
عشـــرة آلاف لمـــا تكمـــلا

(٣) بيت التسعين سقط من الاصل ولكن العقد يتضح من هذا البيت وما بعده .

فعقـــد ذاك فاستعـــر عقـد ميـة
بحالهـــا كحلقـــة منطويـــة
وكـــل ما زاد على مـا قـد ذكـر
فخـذ لـه بعـض العقـود واستعر
وقـد تقضـي ما أردت ذكــره
مبينـا لمـا كشــفت أمــــره
وذاك اقصـى ما يـراد عقـــده
ويســـتطاع باليـــدين عـــدهُ

• • •

وكتابة الأعداد بأسمائها من غير رموز واجراء العمليات عقليا مع عقد اصابع اليدين باشكال تذكر الحاسب بالاعداد هى الصفات المميزة لحساب اليد ، أما موضوعاته فتبدأ بالنسبة والضرب والقسمة ، وقد تقدم النسبة على الضرب وقد يقدم الضرب على النسبة ، والنسبة والقسمة يفضيان مباشرة الى فكرة الكسور . فلناخذ كتابا يبدأ بالضرب . انه بعد ان يعرض القواعد التي سبق ذكرها يعطى طرقا مختصرة للضرب ، وهى تتفاوت عددا ونصا من كتاب الى كتاب ولكن يمكن اجمال ما يعطيه **ابو الوفاء والكرجي والشهرزوری** بالقواعد الآتية :

١ ــ قواعد للضرب فى ٥ ، ٢١/٢ ، ٣١/٣ وامثالها مما هو من النوع ١٠ن ÷ م حيث م عدد بسيط مثل ٢ أو ٣ .. الخ وهذه القواعد تستغل أيضا فى مثل الضرب فى ١٥ + م فيؤخذ ١٥ × س = س + ١/٢ س عشرات .

٢ ــ (ا + ١٠م) (ب + ١٠م) = (ا + ب + ١٠م) × م عشرات + اب

مثلا ٥٩ × ٥٤ = (٩+٥٤) خمسينات + ٩ × ٤

٣ ــ (ا + ١٠م) (ب + ١٠ن) حيث م/ن عدد بسيط مثل ٢ ، ٣ ، ٤ الخ .

مثلا ٦٤ × ٢٨ ، ٦/٢ = ٣

٦٤×٢٨ = (٨×٣ + ٦٤) عشرينات + ٤ × ٨

٤ ــ (ا + ١٠م) (ب + ١٠م) = (ا + ب + ١٠م − ١٠) (١٠م + ١٠) + (١٠ − ا) (١٠ − ب)

مثلا ٣١×٣٨ حيث العقد التالي ١٠+١٠ = ٤٠ ، ٤٠ − ٣١ = ٩ ، ٤٠ − ٣٨ = ٢ ، ٣٨ − ٩ = ٢٩ فالجواب ٢٩ × ٤٠ + ٩ ×٢ = ١١٧٨ .

ويطبق **ابو الوفاء** هذه القاعدة على الحالة التى يكون فيها م صفرا ، فاذا كان ا = ٣ ، ب = ٥ كان ا + ب + ١٠ م − ١٠ = − ٢ وهو يسمى هذه النتيجة دينا . وربما كانت هذه اقدم اشارة (فى المخطوطات العربية التى وصلت الينا) الى الكميات السالبة .

٥ ــ استغلال القاعدة (١) حتى تشمل عمليات مثل .

(١) ١٢٣ × ٢٥٢ = (١٢٥ − ٢) × ٢٥٢ =١٢٣ (٢٥٠ + ٢) .

(٢) ١/٣ ١٢٨٣٣ × س = (١٢٥٠٠ + ١/٣ ٣٣٣) س .

(٣) ٥٣ ×٤٨ = (٥٠ + ٣) (٥٠ − ٢) .

٦ ــ ا ب = ((ا + ب)/٢)^٢ − ((ا − ب)/٢)^٢

٧ ــ (ا + ١٠ ا) (ب + ١٠ ب) = (ب + ١٠ ب + ب) × ا عشرات + ا ب

اما القسمة فتتضمن ما ياتي :

١ ــ ١٠ م ÷ ١٠ ن = ١٠ م ــ ن وهذا يمكن الحاسب من قسمة اى عدد على ١٠ ن ولنصرف النظر مؤقتا عن الباقى .

٢ ـ القسمة على ٢ ، ٥ ، $\frac{١}{٣}$ ٣ وبوجه عام على م × ١٠ ن حيث م عدد بسيط مثل ٢ ، ٣ الخ .

٣ ـ قاعدة ان القسمة على $\frac{م}{ن}$ تعادل الضرب في $\frac{ن}{م}$ يبدو انها معروفة، والحسّاب يستعملونها في بعض الحالات ولكن يبدو انها لم تتخذ في اذهانهم وضع قانون عام ، ولذلك عندما جاء الحساب الهندى خاليا من هذه القاعدة صرف النظر عنها حتى نسيت الى ان اعيد اكتشافها في مطلع النهضة الاوروبية .

٤ ـ القواعد السابقة تخدم في حال القسمة على اعداد خاصة ، اما الطريقة العامة للقسمة على س فتعتمد على تجريد المقسوم تدريجيا من مضاعفات س ، وعملية التجريد هذه تبدو في بعض الحالات ، وعلى يد الحذاق ، قريبة مما نفعل اليوم ولكنها في اغلب الاحيان تجرى بشكل اعتباطي على مثل الصورة التالية

ليكن المطلوب قسمة ٥٤٣٢١ على ٢٣ .

المطلوب قسمة ٥٤٣٢١ على ٢٣ .

فقد يجرد الحاسب هذا العدد من ٤٦٠٠٠ ويحسب الباقي معه ٨٣٢١ .

ويجرد الباقي من ٦٩٠٠ ويبقى معه ١٤٢١ .

ويجرد هذا الباقى من ٩٢٠ ويبقى معه ٥٠١ .

ويجرد هذا الباقى من ٤٦٠ ويبقى معه ٤١ .

ويجرد هذا الباقى من ٢٣ ويبقى معه ١٨ .

فيعلم ان ٥٤٣٢١ = ٤٦٠٠٠ + ٦٩٠٠ + ٩٢٠ + ٤٦٠ + ٢٣ + ١٨ .

واذن فخارج القسمة المطلوب = ٢٠٠٠ + ٣٠٠ + ٤٠ + ٢٠ + ١ (اى ٢٣٦١ ويبقى ١٨ جزءا من ٢٣) .

• • •

الكسور في حساب اليد : قد يصعب ان نتخيل كتابا ابتدائيا في العمليات الحسابية الا ونتخيل انه يعلمنا كيف نجرى هذه العمليات على الصحاح ثم يعلمنا كيف نجريها على الاعداد الكسرية ، ولكن هذا تقليد جاء مع الحساب الهندى ، اما حساب اليد فتكاد الكسور فيه لا تفارق الاعداد ، نجدها في بحث القسمة ونجدها في بحث النسبة ، ومعالجتها تشغل الحيز الاكبر من هذا البحث وذاك .

ومفهوم الحاسب العربي للكسر والكسور لا يطابق تماما مفهومنا العادى . فاذا هو حصل على الكسر $\frac{١٨}{٢٣}$ السابق فهم ان ذلك يعنى ان لو كان ثمة واحد صحيح قسم الى ٢٣ جزءا فان ١٨ منها تعدل هذا الذى حصلنا عليه . ولكنه من قبل ان يتأثر بالحساب الهندى كان يستعمل اربعة الفاظ بصدد ما نسميه نحن بالكسر العادى ، هي كسر وكسور وجزء واجزاء . اما الكسر فمثل نصف وثلث ، الى العشر ، ولديه من هذه تسعة الفاظ فقط كل منها يدل على كسر . اما الكسور فمثل ثلثين وثلاثة ارباع وتسعة اعشار ، وهذه الاخيرة تسعة كسور كل واحد منها كسر هو عشر . وقد يعالج مقدارا مثل ١/٢ × $\frac{١}{٣}$. $\frac{١}{٥}$ فهذه ايضا كسور .

ولكن ثمة ما لا نعبر عنه بدلالة هذه الكسور، مثل $\frac{١٨}{٢٣}$ فهذه هي الاجزاء ، اننا نسميها ١٨ جزءا من ٢٣ جزءا ، فالمقدار $\frac{١٨}{٢٣}$ عند الحاسب القديم اجزاء لا كسر ولا كسور .

ولكن هذا التمييز بين الكسر والكسور والجزء والاجزاء اخذ يتضاءل بسرعة فصارت كل هذه المقادير تسمى كسورا الا ان التعبير

عن كل منها بدلالة الكسور التقليدية (النصف والثلث الى العشر) ظل يلازم الحساب حتى نهاية العصر الاسلامي .

كان حساب اليد يشتمل على ثلاثة انظمة كسرية ، اولها الكسور الستينية وغاية الحاسب الاولى عندما يحصل على كسر مثل $\frac{١٨}{٢٣}$ ان يحوله الى كسور ستينية ، والحاسب الفلكي قد يسمي الكسور الستينية دقائق وثواني الخ ، الا ان الحاسب المادى يسمى الدقيقة عشيرا والدقائق عشرانا ويحول الكسر الى عشران واجزائها . وقد يحوله اذا اراد مزيدا من الدقة الى عشران وعشران العشران واجزائهـا .

والنظام الكسرى الثاني هو هذا الذى يعبر بـه عـن مثل $\frac{١٨}{١٢}$ بدلالـة الالفـاظ التسعـة التقليدية . وفي حساب اليد قواعد لذلك فمثلا $\frac{١}{١٨}$ قد نسميه ثلث سدس ولكن افضل ان نسميه نصف تسع مبتدئين بالكسر الاكبـر (النصـف) .

والنصف كبر مفرد اما نصف التسع فكسر كسر أو كسر مضاف ، والخمسـة أسداس كسور يفضل أن يعبر عنها بالكسر المعطـوف نصف وثلث ، يستثنى من ذلك الثلثان فـلا تحول الى كسر معطوف . ومن الاجزاء ما قد يحول الى كسور مثل $\frac{١}{١٨}$ ، $\frac{٥}{١٨}$ ولكن منها ما لا يمكن تحويله بدقة مثل $\frac{١}{١١}$ ، $\frac{١}{١٣}$ الخ فهذه اجزاء صمام ، كما أن مخارجهـا ١١ ، ١٠ الخ صمـاء بالنسـبة الى هذا التحويل ، وينبغي تحويلها بالتقريب ، ولهم فى هذا التقريب مبادىء ذات قيمة رياضية وان تكن تبدو لنا الآن جهـدا لا طائل تحته .

ومخرج الكسـور هو الاصل الذى هي منه فمخرج النصف ٢ ولكن مخرج المقدار نصف وثلث ٦ لان هذا هو اصفر عدد « له نصف وثلث » ، وعبارة « له نصف وثلث » تعني ان نصفه وثلثه عـددان صحيحان . واذا كانت غاية الحاسب الاولى عندما يحصل على كسر ان يحوله الى كسر ستيني فغايته الأخيرة هي ان يعبر عنه بدلالة الالفاظ التسعة التقليدية ، فتراه يحصل على $\frac{٤}{١٠}$ مثلا فيقول: وهو ستة عشر عشيرا اى خمس وثلث خمس وغايـة بحث النسبة ان يؤدى الى هذا التحويل ، منه يتعلم الحاسب كيف يحول اى كسر الى عشران ثم كيف يحول العشران واجزاءها الى الكسور التقليدية ، وفى كتاب ابي الوفاء فصول هي اشبه بجداول لهذه التحويلات .

ونشير هنا الى تساؤل حول هذا التقليـد الغريب ، ما أصله ؟ ونعني به التزام التعبير عن المقادير الكسرية بدلالة الالفاظ التسعة وهي النصف والثلث الى العشر .

انه يبدو غريبا نشأ لأن فى العربية اسماء مفردة لهذه الكسور التسعة وحدها ، ولـذا التزم العـرب بهـا وحدها للتعبير عـن كـل الكسور الاخرى ولو على حساب الدقة ، وقد يؤيد ذلك ما يرافق بحث الكسور من الفاظ استعيرت من مصطلحات لغوية كالمضـاف والمعطوف والمستثني .

ولكن ثمة دلائل على أن الرياضيين ، حتى أولئك الذين ملكوا ناصية اللغة منهـم كابن طاهر صاحب التآليف فى علم الكلام ، ابوا أن يخضعوا الرياضيات للاعتبارات اللغوية ، الى حد يجعلنا نستبعد أن يكونوا بذلوا هذا الجهد خضوعا لحذلقة لغوى ، ومن الامثلة على هذا الاباء ان أكثر كتب الحساب ، سواء منها ما كان فى حساب اليد أو فى الحساب الهندى ، تذكر ان مثل العدد ٩٨٧٦٥٤٣٢١ يجب ان يقسم الى ثلاثيات ويقرأ ٩٨٧ الف الف و ٦٥٤ الفا و ٣٢١ ، وهي ترفض صراحة راى من يرى قراءتها منزلة منزلة ابتداء من اليمين او من اليسار ، لما فى ذلك من تكرار ممل ، وهي لا تذكر من الذى يرى هذا الرأى ولكننا نجـده فى كتب اللغويين ولا نجده يراعى فى كتب الرياضيين .

اذن فما اصل ذلك التقليد الغريب ؟ لقد جرى المصريون القدماء على التعبير عن كل مقدار كسرى بدلالة كسور بسوطها وحدة وفى كتبهم التي وصلت الينا جدول يعطي تحويل كل كسر من مثل $\frac{٢}{٢م+١}$ الى مجموعة من الكسور من النوع $\frac{١}{٥}$، وقد كانوا يستثنون من هذا التحويل الكسر $\frac{٢}{٣}$ وقد يستثنون ايضا $\frac{٣}{٤}$ وهذا التقليد نجده استمر فى مصر وانتقل الى رياضيي العصر الهلينستي حتى ان بروكلس (القرن ٥م) يعبر عن $\frac{٢٣}{٢٥}$ بالشكل نصف وثلث وجزء من خمسة عشر وجزء من خمسين . اذن فاقرب الاحتمالات ان يكون هذا التقليد اثرا من رواسب التقليد الفرعوني القديم تكيف على يد الحاسب العربي بحيث طابق طبيعة فى اللغة العربية .

اما النظام الكسرى الثالث الذى نجده فى حساب اليد فمبني على وحدات القياس واجزائها ، ولا سيما وحدات العملة ، فاذا كان الدرهم ٦ دانق والدانق ٨ حبات ، يعبر عن السدس بلفظة دانق وعن $\frac{١}{٤٨}$ بلفظة حبة. وهذا يفضي الى مسائل تقتضي اجراء عملية الضرب أو القسمة على عددين مثل ٣ دراهم ودانق وحبتين فى درهم و ٣ حبات . وفى النظام من التعقيد ما يجعلنا نجزم بأن النظام الستيني كان يغني عنه ، لا سيما وان وحدات العملة تتغير من مكان الى مكان ومن زمان الى زمان . ولكنالواقع انهذا النظاماستمر ينمو ويستوعب المزيد من الوحدات حتى نهاية العصر الاسلامي ، حتى لنجده في مثل مفتاح الحساب لغياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي (المتوفى سنة ١٤٣٦/٧م) نظاما بالغ التعقيد .

عمليات اخرى

الضرب والقسمة والنسبة وما تضم من عمليات كسرية هى العمليات الاساسية فى كتب

حساب اليد ، فماذا عن استخراج الجذور ؟ أبو الوفاء لايورد له ذكرا ، غير انه عندما يأتي الى المساحات ، حيث يلزم استخراج ضلع المربع أو قطر الدائرة اذا عرفت المساحة يعطي قيمة صحيحة للجذر التربيعي من غير ان يذكر كيف حصل عليه . اما الكرجي (وشارحه **الشهرزورى**) ومن بعده ممن كتبوا فى حساب اليد فيعطون طريقة لاتختلف من حيث المبدأ عن الطريقة الهندية والطريقة العادية المتبعة اليوم ، انها تستند الى المبادىء الآتية :

١ ـ كل عدد يكون بالشكل الذى نسميه به ، مركبا من مراتب هي الآحاد والعشرات والمئات والالوف الخ .

٢ ـ هذه المراتب هي بالتناوب منطقة ، صماء ، منطقة ، صماء الخ .

٣ ـ عند ايجاد الجذر التربيعي لأى عدد نبدأ من أعلى المراتب المنطقة .

٤ ـ بعد هذا يمضى العمل بالشكل المألوف استنادا الى المبدأ $(أ + ١٠ ب)^{٢} = أ^{٢} + ١٠ (٢أ.ب) + ١٠٠ ب^{٢}$ ولكن فى هذه الطريقة اختلافين جوهريين عما نجريه اليوم .

١ ـ نحن نكتب العدد بالارقام وهي تخلو من أى ترقيم .

٢ ـ نحن اذا اردنا ان نجد الجذر التربيعي لمثل ٤٩٨١٢٣ نتساءل عن جذر ٤٩ ونعتبره ٧ ، أما الحاسب باليد فيتساءل عن جذر ٤٩٠٠٠٠ ويعتبره ٧٠٠ .

لاندرى كم من هذه الطريقة كما يقدمها الكرجي مأخوذ من الحساب الهندى ، ولكن رغم مابينها وبين الطريقة الهندية من اتفاق نجد ما يشير الى انها اصيلة فى حساب اليد فهي تستند الى مبدأ فى التقريب يمكن ان نعبر عنه بالشكل $\sqrt{م^{٢} + ب} = م + \frac{ب}{٢م}$ تقريبا،

وهذه القاعدة يعزوها ابن طاهر للخوارزمي ويشير الى ان الرياضيين لايرضون عنها لافتقارها الى الدقة ومن ثم فهم قد اصطلحوا على الاستعاضة عنها بالقاعدة $\sqrt{م^{٢}+ب} = م + \frac{ب}{٢م+١}$ والمخرج (٢م+١) صار عند المتاخرين تقليديا حتى سمي بالمخرج الاصطلاحي .

وهذا الذى يذكره ابن طاهر لانجده فى الكتب اللاتينية المنقولة عن كتاب الخوارزمي فى الحساب الهندى . ومن ثم نرجح انها من كتابه فى الجمع والتفريق الذى ينقل عنه ابن طاهر والذى رأينا انه في حساب اليد .

وبهذه المناسبة نود ان نشير الى امرين يتعلقان بهذا الكتاب :

الأمر الأول هو انما نسميه اليوم بعملية الجمع يسمى فى كل كتب الحساب العربية بلا استثناء بالزيادة كما تسمى عملية الطرح بالنقصان . ولا تأتي لفظة الطرح الا فى مثل « طرح التسعات » أو « طرح الباقي » بمعنى الابعاد والاهمال . اما الجمع فيأتي فى المخطوطات القديمة بمعنى ضم اى مقدارين وجعلهما مقدارا واحدا ، سواء كان هذا الضم زيادة او ضربا ، فتحويل $\frac{١}{٢}+\frac{١}{٣}$ الى $\frac{٥}{٦}$ جمع وكذلك تحويل $\frac{١}{٢}-\frac{١}{٣}$ الى $\frac{١}{٦}$ جمع .

وعندما عدل الحساب الهندى ، بحيث صارت عملية الزيادة تطبق على اكثر من عددين سميت العملية الجديدة جمعا تمييزا لها عن الزيادة التي هي عملية ثنائية ، على عددين فقط .

فليس بعيدا اذن ان يكون الخوارزمي يستعمل كلمة الجمع لتشتمل الزيادة والضرب ، فيكون بالمقابلة قد استعمل « التفريق » لتشتمل النقصان والقسمة .

والامر الثاني الذى نريد ان نشير اليه هو ان الباحثين كانوا حتى وقت قريب جدا يعرفون ان الحساب الهندى دخل ديار الاسلام ومنها انتشر الى الغرب عن طريق كتاب الخوارزمي وكانوا يجهلون ان هذا الحساب دخل مع التخت (abacus) وان الخوارزمي وضع كتابا آخر فى حساب اليد ، ومن ثم احتاروا فى عبارة درج على استعمالها البيزنطيون المتاخرون اذ قسّموا الحسّاب الى حسّاب تخت abacists وخوارزميين algorists (٤) فظن الباحثون ان الخوارزميين هم اتباع الحساب الهندى وبذا وقعوا فى تناقضات كثيرة لم تنجل الا عندما عرفت الحقيقة وهي ان حسّاب التخت هم اتباع الحساب الهندى وان الخوارزميين هم حسّاب اليد ، اتباع الطريقة التى يصفها **الخوارزمي** فى كتاب « الجمع والتفريق » .



صفوة ما يمكن ان نقوله بشأن عملية استخراج الجذر التربيعي ان حساب اليد كان بالتأكيد يشتمل على هذه العملية ، ولكنها لم تكن تعد اساسية وربما كانت تجرى بطريق تجريبي ظني غير محدود المعالم قبل ان يعدلها الحسّاب العرب على غرار الطريقة الهندية .

وثمة عملية اخرى ثانوية نجدها فى كتب حساب اليد كما نجدها فى كتب الحساب الهندى ، هي عملية طرح التسعات وقد كان يظن انها ابتكار عربي الى ان اكتشف **فيبكي** رسالة **لابن سيناء** تسمى فيها بالطريقة الهندية ، والحسّاب العرب يجرون اى عملية

(٤) بحثنا فى ذلك ببعض التفصيل فى المقالة « The Earliest Extant Arabic Arithmetic » فى مجلة Isis ، المجلد ٥٧ ج٤ رقم ١٩٠ ، سنة ١٩٦٦ ، الصفحات ٤٧٥ ـ ٤٩٠ وقد اعددنا لكتاب الفصول فى الحساب الهندى نسخة محققة مع دراسات مقارنة نامل ان ندفع بها الى المطبعة عما قريب .

ثم يتحققون من صحتها بطرح التسعات واحيانا بطرح الثمانيات او السبعات أو الاحد عشرات سواء منهم من جرى على الحساب الهندى أو على حساب اليد ، والشهرزورى يذكر ان طرح التسعات تقليد هندى . وعلى هذا فالعملية ليست اصيلة في حساب اليد وربما كنا على صواب اذا قلنا ان العرب اخذوها عن الهنود ولكنهم مدوا فيها ووسعوا .

التطبيقات فى حساب اليد

اذا حكم القارىء بأن هذا النظام الحسابي الذى وصفنا بدائي وانه رغم بدائيته معقد ، فقد يكون على حق . واذا جازلنا ان نستبق الحوادث فانا نذكر ان مافيه من بدائية وتعقيد قد أزاله الحسّاب العرب بالاستعانة بطرق الحساب الهندى وان مافيه من اخطاء قد اصلحوه بالاستعانة بالفكر الرياضي الاغريقي، وان نتيجة ذلك هو النظام الحسابي الذى استلم الغرب زمامه فى القرن السادس عشر . ولكن مهما يكن حكمنا على حساب اليد فينبغي الا ننسى انه هو لا الحساب الهندى الذى تولد عنه علم الجبر العربي وعلم المثلثات .

عندما يفرغ المؤلف من وصف العمليات الاساسية فى حساب اليد يأتي الى التطبيقات، وهذه التطبيقات قد تشمل الكثير من شؤون الحياة اليومية ولكن اهمها امران : ــ

اولهما تطبيق هذه العمليات على حل المسائل التي يراد بها ايجاد مجهول ما ، واول مايكون ذلك فى مسائل النسبة والتناسب ، مما يفضي الى مثل المعادلة س : ا =ب: جـ أو ا : س = ب : جـ وهذا يقود الى معالجة معادلات اخرى من النوعين اس + ب = جـ ، اس٢ + ب‌س + جـ = صفر وايجاد المجهول فى اى مسئلة حسابية تؤدى الى مثل هذه العلاقات يكون بما سماه العرب بالجبر والمقابلة . اما الجبر فكانوا يعنون به معالجة المعادلة بحيث يزال ما فيها من كسور ، وقد تمتد المعالجة الى ازالة مافي المعادلة من حدود سالبة . فعندما يتم ذلك يأتي دور المقابلة ، ويقابل فى عرفنا النقل والحذف والاختصار ، للحصول على قيمة المجهول .

ويجرى هذا العمل كله فى المخطوطات القديمة بالكلمات ، خالية من الرموز ومن الارقام. اما ما يقابل س فيسمى عادة بالشيء أو الجذر ، واما ما يقابل س٢ فيسمى بالمال ، واما العدد الثابت فيقدر بالدراهم ، وعلى هذا قد نجد فى هذه المخطوطات سؤالا مثل « مال الا شيئين يعدل ثلاثة دراهم » .

وفى المخطوطات المتاخرة نجد الارقام تدخل تدريجيا ويدخل معها نظام رمزى ، يرمز فيه الى المال بالحرف م والى الشيء بالحرف **ش** والى المساواة بالحرف **ل** (من لفظة يعدل) فيصير السؤال السابق م الا ٢ش ل ٣ دراهم .

ومن البدء نجد حل المعادلة، ولكن الحسّاب بلا استثناء كانوا يعطون الجذور الموجبة ويهملون السالبة ، اما حيث تكون الجذور خيالية ، فيقولون ان الحل مستحيل .

وربما كانت قمة ما وصل اليه الجبر العربي هو حل المعادلة التكعيبية على يد **عمر الخيام** (القرن ١١/١٢م) وهنا ايضا يعطي الخيام الجذور الموجبة اذا وجدت .

ويبدو أن هؤلاء الحسّاب كانوا يفطنون الى الجذور السالبة ولكنهم لم يحاولوا استنباط مغزى رياضي لها ومن ثم لم يعنوا بتسجيلها.

ومعظم كتب حساب اليد تفرد حيزا كبيرا للجبر ، على ان بعض الكتاب يخصصون له كتابا خاصا ، وقد يسمي الكتاب كتابا في الحساب ، ذلك ، ان الجبر كان جزءا من الحساب . ومن الامثلة على ذلك كتاب «طرائف الحساب» **لشجاع بن أسلم الحاسب المصرى** (القرن ٩/١٠م) وهو فى المعادلات السيالة مثل معادلة مجهولين او اكثر ، حيث يراد اعطاء الجذور التي تحقق شرطا معينا ،

كأن تكون كلها اعدادا صحيحة . ومن الامثلة ايضا كتاب « الباهر في الحساب » للسموال (المتوفي سنة ١١٧٤م) وهو يبدأ بمقدمة عن العمليات الحسابية ثم ينصرف للجبر .

والميدان الثاني الذى يجرى فيه تطبيق المبادىء الحسابية هو ميدان المساحة ، والمساحة فى المخطوطات العربية تعني ماتعنيه كلمة mensuration وهو ما يعمله المساح من ايجاد الاطوال والابعاد والاعماق وتقدير مساحات السطوح وحجوم الاجسام . اما تقدير مساحات السطوح وحجوم الاجسام فيسمى تكسيرا .

وايجاد الاطوال والابعاد لابد ان يفضي الى بحث المثلثات المستوية .

لاشك ان نقطة « جيب » بمعنى النسبة المثلثية المعروفة مأخوذة عن لفظة جيا السنسكريتية . وفى كتاب اريابهاتا ، وفى السدهانتات الهندية نجد مبادىء علم المثلثات، الا ان الهنود لم يسبقوا الى ابتكار فكرة النسب المثلثية ، فقد ابتكرها هيبارخس وتناولها من بعده بطليموس فعمل جداول للجيوب حسبها مستندا الى مايسمي بنظرية بطليموس وهي القائلة بان حاصل ضرب قطرى الشكل الرباعي الدائرى يساوى مجموع حاصلي ضرب كل ضلعين متقابلين فيه . ومن هذه النظرية تدرج بطليموس الى ايجاد ما يقابل جا (أ+ب) ، جا ٢أ ، جا (٩٠ـأ). ولكن بطليموس لم يعتبر جا أ نسبة خاصة بالزاوية أ ،انما كان يحسبه نصف وتر الزاوية ٢أ وهذا ما يذكر ابو الوفاء ان الفلكيين يسمونه الجيب المستوى ، كما يسمون السهم بالجيب المعكوس . وواضح انه اذا كان نصف قطر الدائرة وحدة كان نصف وتر الزاوية ٢أ يساوى جا أ كما ان السهم يساوى ١ ــ جتا أ والجداول التي عملها بطليموس فى كتابه المجسطي تعطي اطوال انصاف الاوتار باعتبار نصف القطر ٦٠ اى وحدة ستينية . والذى صنعه الهنود انهم جعلوا اسما خاصا لطول نصف وتر الزاوية ٢أ وهو jya ومنه جاءت كلمة جيب العربية، والكلمة اللاتينية sinus ترجمة لمعنى لفظة الجيب العربية التي ليس لها صلة بالنسبة المثلثية .

والهنود لم يتفقوا على طول نصف القطر ، ولذلك تختلف جداول الجيوب عندهم . وقد كان ابو الريحان البيروني اول من قال بأخذ نصف القطر وحدة ، وهكذا جعل للنسب المثلثية قيما تعادل ما نعطيه فى جداولنا المعاصرة .

وفى كتاب «اريابهاتا» نجد ٢٤ جيبا تبدا بالزاوية ٢٢٥َ وتتناول جميع مضاعفاتها حتى ٨٦ $\frac{1}{4}$ْ ، وقد جعلوا لهذه الزاوية اسما خاصا هو kramajya ومنها جاءت لفظة كردجة التى نجدها فى الكتب العربية . اذن فأساس المثلثات العربية مأخوذ من الهندية ومن الاغريقية ، فما نجده اذن من مبادىء المثلثات في كتاب ابي الوفاء ليس اصيلا فى حساب اليد الموروث واما هو تطوير لحساب اليد اقتضاه اصلاح ماوجد الحسّاب العرب فى هذا الحساب من قواعد خاطئة .

وقد كان مجهود العرب بصدد الجيوب هو اشتقاق جداولها من مبادىء اسهل من نظرية بطليموس التي تقتضي عمليات معقدة واصح من الطرق الهندية التقريبية التى لايؤيدها البرهان . ويكاد الاثر الهندى فيما يتعلق بالجيب ان يكون مقصورا على اعطاء الاسم للعرب . وقد اهتم الهنود ايضا بقيمة ١ـجتا وهي التي سماها العرب الجيب المعكوس .

واما النسب المثلثية الاخرى فهي عربية لم يستعملها الهنود ، وفى معظم الازياج العربية جداول للظل وظل التمام على ان للعرب جهودا اخرى فى المثلثات الكروية التي كانت هي والمثلثات المستوية من مبادىء الرياضيات الفلكية بقدر ما كان الجبر من مبادىء الحساب .

ثانيا : الحساب الهنـدى

ا ـ الرياضيات الهندية فى العالم العربي

قصة الصلة بين العرب والعلوم الرياضية الهندية يوجزها لنا نصان عربيان :

النص الاول : تنقله المصـادر العربية عـن زيج مفقود لابن الأدمى(القرن ٩/١٠م) يسمى «الزيج الكبير»أو «نظم العقد»، وربما كان اقدم هذه المصادر كتاب طبقات الامم **لصاعد الاندلسى** ففى الصفحة ٥٧ (طبعة مصر) نجد ما يلى :

« قدم على الخليفـة المنصـور سنة ست وخمسين ومائة رجل من الهند عالم بالحساب المعروف بالسند هند فى حركات النجوم ، مع تعاديل معمولة على كردجات محسوبة لنصف درجة ، مع ضروب من اعمـال الفلك ، مـن الكسوفين ومطالع البروج وغير ذلك ، في كتاب يحتوى على اثنى عشر بابا ... فامر المنصور بترجمة ذلك الكتاب الى العربية وان يؤلـف منه كتاب تتخذه العرب اصـلا فى حركـات الكواكب، فتولى ذلك محمد بن ابراهيم الفزارى وعمل منه كتابا يسميه المنجمون بالسندهند الكبير فكان أهل ذلك الزمان يعملون به الـى ايام الخليفه المامون فاختصره له ابو جعفـر محمد بن موسى الخوارزمى وعمل منه زيجه المشهور ببلاد الاسلام وعول فيه على اوسـاط السند هند وخالفه فى التعاديل والميل ، فجعل تعاديله على مذهب الفرس وميل الشمس فيه على مذهب بطليموس ، واخترع فيه من انواع التقريب ابوابا حسنة ، لاتفى (كذا ولعلها كى تفى) بما احتوى عليه من الخطأ البين الـدال على ضعفه في الهندسة وبعده عن التحقيق بعلم الهيئة ، فاستحسنه اهل ذلك الزمـان مـن أصحاب السندهند وطاروا به فى الآفـاق .. ولما افضت الخلافة الى **عبد الله المامون** .... ووقف علماء وقته على «كتاب المجسطى» وفهموا صورة آلات الرصد الموصوفة فيه ... أمرهم ان يصنعوا مثل تلك الادوات .

والنص الثاني : يذكره **صاعد** (فى الصفحة ١٣) حيث يقول :

« ولبعد الهند من بلادنا واعتراض الممالك بيننا وبينهم قلت عدنا تآليفهم ولم يصـل الينا الا طرف من علومهم .. وممـا وصل الينا مـن علومهم في العدد حساب الغبار الذى بسطه ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي وهو أوجز حساب واخصره واقربه تناولا » .

فالصورة العامة التى يرسمها هذان النصان هى :

١ ـ في عهد **المنصور** بدا اطلاع العرب على العلم الفلكي الهندى وشرعوا بنقله الىالعربية .

٢ ـ وفي عهد **المامون** اتصل العرب بالفكـر اليونانى ولا سيما كتاب المجسطى لبطليموس وبداوا يحاولون التوفيق بين الطرق الفارسية والهندية واليونانية ، وقد تصدى لذلك محمد بن موسى الخوارزمـي .

٣ ـ وفي عهد المامون ايضا بداوا يهتمون باَلات القياس فى سبيل اقامة علم فلكى محقق تؤيده الارصاد .

٤ ـ وفيه ايضا اخذوا عن الهنود حساب الغبار ، وقد بسطه الخوارزمي .

ونكـاد نلمس من النص الاول ان العـرب فضلوا الفكر اليونانى على الهندى ، فهو يشير الى ضعف الكتاب الهندى في الهندسة وبعده عن التحقيق ، وهذا ماوقع بالفعـل حتى ان العرب مالبثوا ان اخـذوا ببرنامـج دراسـى للرياضيين الفلكيين يبدأ بكتاب اقليدس وينتهى بالمجسطى لبطليموس وبينهما اثنا عشر كتابـا متوسطات اغريقية وعربية ، ولكن ليس بينها كتاب هندى الاصل ، ولا يعنى ذلك ان العرب اهملوا الفكر الرياضى الهندى ، فهم قد اخذوا أحسن ما فيه ، ولكنهم اعجبوا بأمر هام يميز الفكر الاغريقى ذلك انه قام على برهان رصين

فما يؤيده البرهان يقبله وما يعارضه البرهان يرفضه ، في حين ان الفكر الهندى بطبيعته املائي تلقيني لم يكن قبل تفاعله بالفكر العربي يستلزم البرهان .

ب ــ الحساب الهندى فى الكتب العربية

كان ما تقدم نصيب الفكر الهندي الكلاسيكي(٥) فى العالم العربى ، وهذا لا ينطبق على الحساب الهندى الذى يسميه صاعد (فى النص الثانى) حساب الغبار فهذا له قصة اخرى :

اذا استثنينا النصوص اللاتينية المنقولة عن الخوارزمي (٦) فاقدم كتاب عربي فى الحساب الهندى نعرف عنه هو كتاب «الفصول فى الحساب الهندى **لأبى الحسن احمد بن ابراهيم الاقليدسى**» (٧) ، وقد كتبه في دمشق سنة ٣٤١ هـ (٩٥٢/٣م) ، ولعله لما يقدمه لنا من معلومات أهم مخطوطة عربية وصلت الينا فى الرياضيات . من هذه المعلومات ان الحساب الهندى كما جاء للعالم العربى كان يستلزم استعمال تخت يوضع عليه الرمل فتخط الاعداد على الرمل بالاصبع وبقلم ، وتجرى الاعمال الحسابية معتمدة على المحو والنقل .

من أجل ذلك سمى الحساب الهندى «بحساب الغبار» أو «حساب التخت والتراب» . ومن اجل التخت والتراب كان يتحرج بعض الحسّاب من استعمال الحساب الهندى فهؤلاء يذكرهم الاقليدسي بأن حساب اليد يتطلب منهم تشغيل ايديهم واذهانهم بحيث لا يأتون بحركة حتى يفرغوا بينما هم في الحساب الهندى لا يحتاجون الى مثل هذا الجهد والتركيز ، هذا بالاضافة الى ان طرق الحساب الهندى تنطبق على الاعداد كبيرها وصغيرها على سواء . ولكن الاقليدسى يعود في فصل آخر من كتابه فيذكر ان الحساب الهندى بوضعه هذا يوسخ يد الحاسب وثيابه ثم ان الريح تهب فتطمس مافي الرمل من صور للاعداد ومن ثم فلا بد من تعديل طرقه بحيث يمكن اجراؤها باستعمال القلم والحبر والاستغناء عن النقل والمحو ، وهكذا يقترح الاقليدسي تعديلا للطرق الهندية وهو في كتابه يقدم اشياء يعتز بأنها من صنعه وحده . اما هذا التعديل فلا ينسبه الى نفسه ولكنه يقول انه لم يجد في بغداد من قد سمع به .

فما هو هذا الحساب الهندى الذى يقدمه الاقليدسي ، ومن خلفه من الكتاب ؟

انهم يكادون يتفقون في عرض المادة بترتيب

---

(٥) انظر فى ذلك بحثا لنا عن « الاثر الهندى فى الرياضيات العربية » (مجلة الابحاث السنة ١٥ ، الجزء الرابع ١٩٦٢) .

(٦) نشر من هذه النصوص ثلاثة على ما نعلم :

(١) Algoritmi de numero Indorum ويعتقد انه ترجمة اديلارد الباثي (القرن ١٢) لكتاب الخوارزمي ، وقد نشره بنكمباني فى روما سنة ١٨٥٧ فى Trattati d'arithmetica (الصفحات ١ ــ ٢٣) .

(٢) « Liber Ysagogarum alchorizmi in artem astronomicam a magistro A compositum. » ويعتقد انه تلخيص اديلارد لبعض المبادىء الرياضية والفلكية التي فى كتب الخوارزمي وهو بخمسة اجزاء الثلاثة الاولى منها فى الحساب ، وقد نشرها Curtze فى كتابه :
Abhandlungen Z. Geschechte der Mathematic, 8 (1898) فى الصفحات ١ ــ ٢٧ .

(٣) Dixit algorizmi هذه نسخة اخذت فى القرن ١٣ عن نسخة كتبت سنة ١١٤٣ فى الحساب الهندى الذى يعرضه الخوارزمي وقد نشرها فوجل سنة ١٩٦٣ فى كتاب بعنوان Algorizmus

(٧) قدمناه فى البحث المشار اليه فى (٤) اعلاه ، وقد اعددنا للكتاب نسخة محققة مع دراسة واسعة ونامل ان ندفع به الى المطبعة عن قريب .

معين . فهم يبدأون بالتعريف بصورة الارقام وفكرة المنازل وكيف ان الرقم ٤ مثلا تتغير قيمته حسب المنزلة التى هو فيها فهو اربع وحدات فى منزلة الاحاد ، واربع عشرات في منزلة العشرات ، واربع مئات في منزلة المئات، وهكذا . وصور الارقام عند الاقليدسي وغيره من المشرقيين هي كما يلي :

١ ، ٢ او [illegible] ، [illegible] او [illegible] ، نراها فى تطور حتى تصير ع ، [illegible] او B

٦ ، ٧ ، 7 او ٨ ، ٩ ، وفى احدى المخطوطات يذكر ان التسعة قد تكتب كا اما عند الكتاب المغربيين فتتخذ الارقام الاشكال التالية :

1 ، 2 [illegible] ، [illegible] وقد تبدو احيانا بالشكل [illegible] ، 7 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، اما الصفر فهو عندهما جميعا دائر صغيرة ٥ وقد صار نقطة فى عهد متاخر ، اما المتقدمون فلم نجد منهم من كتبه بشكل نقطة سوى بعض من حسّاب اليد استعملوا الارقام الهندية للاشارة الى ابعاد بعض الاشكال الهندسية ، ومن الجدير بالذكر ان هؤلاء (او نساخ كتبهم) يخطئون في كتابة الأعداد بالأرقام الهندية ، حتى فى حساب ابى الوفاء الرياضى الكبير نجد العدد ٥١ كتب كأنه ٥٠١ .

فاذا اعطى المؤلف صورة الارقام وبين كيف تكتب الاعداد جاء الى العمليات الحسابية على الاعداد الصحيحة ، فتناولها بترتيب يكاد يكون واحدا: الزيادة فالنقصان فالتضعيف فالتنصيف فالضرب فالقسمة فالجذر التربيعى ، فالتكعيبى . وبعض الكتب تعطى التضعيف كنوع من الزيادة والتنصيف كنوع من النقصان وكل الكتب تعنى بالتضعيف الحصول على ٢م اذا عرف م وتعنى بالتنصيف ١/٢م ، الا كتاب الاقليدسي فالتضعيف عنده هو دراسة للمتوالية ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ... والمتوالية م ، ٢م ، ٤م ، ٨م ... والتنصيف عكس ذلك .

واغلب الكتب تذكر تحقيق صحة الجواب بطريقة طرح التسعات ، فبعضها يتبع كل عملية بطريقة تحقيقها وبعضها يعقد فصولا خاصة بالتحقيق . والكتب المتأخرة تضيف طرح السبعات والثمانيات والاحد عشرات ، كلها او بعضها . والاقليدسي يبحث في الجذر التكعيبى ويذكر انه لم يجد عند سابقيه ومعاصريه من وفى الموضوع حقه ، ولكن معظم المؤلفين الذين وصلت الينا كتبهم يعطون طريقة لايجاد الجذر التكعيبى وبعض المتأخرين منهم يعطون طريقة عامة لايجاد الجذر الرابع والخامس وما بعدهما .

ومعظم المؤلفين يعقدون فصولا لتطبيق هذه العمليات على النظام الستينى فيكتبون الدرجات والدقائق والثوانى الخ ، بترتيب افقى او عمودى .

فاذا انتهى عرض العمليات على الاعداد الصحيحة جيء الى الكسور فيعطى المؤلف طريقة كتابة الكسر . والاقليدسى يكتب $\frac{٣}{٤}$ مثلا بالشكل $\begin{matrix}٣\\٤\end{matrix}$ (بدون خط الكسر) ويكتب $١\frac{٣}{٤}$ بالشكل $\begin{matrix}١\\٣\\٤\end{matrix}$ والمؤلفون الاخرون يوافقونه ولكن نجد عند القدماء منهم ميلا لوضع صفر فوق الثلاثة فى مثل $\frac{٣}{٤}$ لحفظ منزلة العدد الصحيح ولكن المتأخرين يتخلون عن هذا التقليد . وتمضى معالجة عمليات الكسور بمثل ترتيبها على الاعداد الصحيحة ، والاقليدسي يلح على التمييز بين الكسر والكسور والجزء والاجزاء كعادة حساب اليد ، وهو احيانا يحول الكسر في الناتج النهائي الى الصيغة التقليدية فاذا حصل على $\frac{٧}{٢٠}$ مثلا قال وهو ثلث وسدس عشر ولكن لانجد عنده ذكرا لتقريب قيم الكسور التى لا يمكن تحويلها الى هذه الصيغة . ولكننا نلمس عند المؤلفين تحولا سريعا عن تقليد

حساب اليد وتقبلا لفكرة الكسر العادى العام، حتى لنجد **نصير الدين الطوسي (١٢٠١ ـ ١٢٧٤ م)** يذكر في كتابه « جوامع الحساب بالتخت والتراب» (٨) ان المختار عند اعطاء النسبة بين اى عددين هو ان تعطى بدلالة « اقل عددين يوجدان على تلك النسبة ، وما سواها فايراده قبيح » .

• • •

لم نذكر بعد كيف كانت العمليات الحسابية تجرى في الحساب الهندى ، ولكنا ذكرنا انه كانت تعتمد على المحو والنقل ، ولنوضح ذلك بعملية جمع وعملية ضرب .

(١) ليكن المطلوب جمع العددين

٣ ٥ ٧ ٩
٨ ٧ ٩ ٦

يكتبهما الجمع بالشكل المبين على التخت ، ثم يبدا الجمع من المنزلة العليا ، يجمع ٦ الى ٩ فيمحو ٩ ويكتب مكانها ١٥ ، ثم يجمع ٩ الى ٧ ويضع مكانها ٦ ثم يمحو الخمسة التي الى اليسار ويضع مكانها ٦ ، الخ وفى النهاية يبقى امامه على التخت

١ ٣ ٧ ٦ ١
٨ ٧ ٩ ٦

والمجموع هو مافي السطر العلوى وقد احتل مكان اول العددين .

(٢) ليكن المطلوب ضرب ٥ ٧ ٣ في ٣ ٣ ٢ يكتبان على التخت بالشكل ٥ ٧ ٣
٢ ٤ ٣

اى بحيث يكون آخر منازل الاول فوق اول منازل الثاني

ثم يبدا ضرب الاسفل فى ٣ : ٣×٢=٦ فيكتب ٦ فوق ٢ فى السطر العلوى، ٣×٤=١٢ فنكتب ٢ فوق ٤ ونمحو ٦ ونجعلها ٧ ، ٣ × ٣ = ٩ فنكتب ٩ مكان ٣ وهكذا يصير الشكل

٥ ٧ ٩ ٦ ٧
٣ ٤ ٢

ناتى الآن الى ضرب ٢٤٣ فى ٧ ،واول الخطوات هى ان ننقل ٢٤٣ بحيث تصير اول منازله تحت السبعة :

٥ ٧ ٩ ٦ ٧
٣ ٤ ٢

ثم نبدا الضرب : ٧ × ٢ = ١٤ فنضم ١٤ الى مافوقها وهو ٧٢ ، فنمحوه ونضع مكانه ٨٦ ، ٧ × ٤ = ٢٨ ، فنضم ٢٨ الى مافوقه وهو ٦٩ ، فنمحوه ونضع مكانه ٩٧ ، ٧×٣ = ٢١ فنضم ٢١ الى ما فوقه وهو ٧٠ (بالتغاضى عن السبعة التى نضرب بها) + فنمحو ما فوقه ونضع مكانه ٩١ فيصير الشكل

٥ ١ ٩ ٩ ٨
٣ ٤ ٢

فننقل السطر السفلي منزلة الى اليمين ثم نضرب في ٥ كما تقدم .

وفي النهاية يكون امامنا على التخت المضروب في الاسفل وفوقه حاصل الضرب ، اما المضروب فيه وخطوات العمل المتوسطة فقد محيت كلها .

نجد في كل مخطوطة عربية طرقا متعددة للضرب ، ولكن اولها الطريقة المتقدمة ، والاقليدسي يعطيها ثم يعطي طرقا اخرى غيرها ويشير بشكل غير محدود ان بعضها مما يفعله حسّاب الروم والعرب ، ولكن يبدو مؤكدا ان بعض هذه الطرق هندى الاصل

---

(٨) نشرنا هذا الكتاب فى مجلة الابحاث سنة ١٩٦٧ (المجلد ٢٠/٢ صفحة ٩١ ـ ١٦٤ ، والمجلد ٢٠/٣ صفحة ٢١٣ ـ ٢٩٢) .

ايضا ، ولكن الحساب العرب وضعوا طرقا اخرى نشأ بعضها من محاولة الدمج بين الانظمة الحسابية المختلفة ولكن لعل اكثرها قد نجم عن محاولة الاستغناء عن التخت واستعمال الورق والحبر . والاقليدسي يجعل فصلا كاملا من فصوله الاربعة لتعديل الطرق الهندية بحيث تحقق هذه الغاية ، ولكن يبدو ان تعديله لم يأخذ به من خلفه لأنه عول على مزج الارقام الهندية بالنظام الابجدى فى كتابة الاعداد . ويظهر من الحواشي التى نجدها على المخطوطات ان الطريقة العملية التى راجت هي ان يشطب الرقم الذى يراد محوه (بوضع خط تحته) ويكتب الرقم الجديد فوقه فتظهر عملية ضرب ٨٧ في ١٢٣ مثلا بالشكل .

	٧		
	٦	٠	
١٠	٥	٨	
٩	٨	٤	١
٨	٦	٨	٧
١	٢	٣	
	١	٢	٣

فالجواب ١٠٧٠١

اما الطريقة الدارجة اليوم فرغم اننا نجد معالمها حتى فى حساب اليد ونلمحها تحت انظار الحسّاب وابصارهم الا انها لم تنتشر على ما يبدو قبل القرن الخامس عشر فكأن الحسّاب قد جعلوا هممهم مجرد ابتكار الطرق الجديدة بدل البحث عن ابسط واسلس طريقة .

● ● ●

قد يحسن ان نتوقف هنا وقفة نقيّم فيها الحساب الهندى بالمقارنة بحساب اليد وبما آل اليه الامر على يد العرب على قدر ما يظهر ذلك من عملية الضرب الاساسية في كل نظام .
ولنفرض ان المطلوب ضرب ٨٧ في ١٢٣ . فماذا يفعل الحساب باليد ؟ انه يحمل العددين فى ذهنه او قد يكتبهما على ورقة بالكلمات ، فليس لديه نظام رمزى للاعداد . وهو بعد ان يتاكد ان عليه ان يجرى ست ضربات يبدأ بقوله : ثمانين في مائة بثمانية آلاف ، فيعقد على اصابعه ما يشير الى ثمانية آلاف ، ثم ينتقل الى الثمانين في العشرين ، وهكذا . ان حسابه عقلي ، هوائي ، يستلزم تركيز الذهن وشغل اليدين جميعا ، هذا اذا لم يلجأ الى حيلة مثل تقدير ٨٧ × ١٢٥ – ٨٧ × ٢ (أى $\frac{\text{٨٧ أف}}{\text{٨}}$ – ٨٧ × ٢) فاذا هو فرغ من عمله واراد مراجعته كان عليه ان يعيده من جديد .

وماذا يفعل الحاسب بالطريقة الهندية ؟ انه يخرج لوحة ينشر عليها طبقة رقيقة من التراب ثم يكتب العددين . ٨ ٧

٣ ٢ ١

ويبدأ فيضرب ٨ فى ١ (وليس ٨٠ فى ١٠٠) ويضع الناتج فى مكانه المناسب فى السطر الاول . ثم يمضى فى عمله ، ومضيه هذا يتضمن المحو والنقل ، حتى اذا هو فرغ كان حاصل الضرب امامه فى السطر العلوى ، فاذا هو اراد مراجعته اعاد الحل كله من جديد ، هذا اذا كان لا يزال يذكر المضروب فيه الذى محاه .

اذا كانت الطريقة الاولى باعتمادها على الاصابع بدائية . فالطريقة الثانية باعتمادها على الرمل والمحو والنقل لا تمتاز الا فى انها ازالت عن عاتق الحاسب عبء تركيز الذهن وشغل اليدين والحواس . ولكن الحاسب ما يزال بحاجة لأن يرى خطوات الحل كلها امامه ، لا لمراجعة العمل فقط ، ولكن لأن رؤية خطوات الحل كلها أمر لا بد منه اذا اريد ان تكون الطريقة خصبة في ايحاءاتها قابلة للتطور . كانت العمليات في حساب اليد ذهنية غير محدودة ، اشبه بشيء غير ملموس ولكن عمليات الحساب الهندى كانت وسطا بين ذلك الشيء وبين ما اسلمه العرب للرواد الاوائل الغربيين من عمليات محدودة مكتوبة .

جـ الارقام الهندية فى التاريخ

هذا التقييم الذى تضمنته السطور القليلة

السابقة ينصب على العمليات الحسابية وحدها مجردة عن النظام الرمزى للأعداد ، الذى يعتبر من اكبر مآثر التراث الهندى واكبر مآثر العصور الوسطى قاطبة ، ذلك انه نظام منازلي عشرى كامل .

لقد كان للمصريين والبابليين والاغريق والرومان والعرب انظمة رمزية لكتابة الاعداد، ولقد كان النظام الحسابي البابلي منازليا ستينيا ولكنه كان ينطوى على ثلاثة عيوب اولها ان النظام الحسابي كان منازليا ستينيا ولكن النظام الرمزى الذى يرافقه كان يعتمد على رمزين احدهما للواحد والثاني للعشرة وهما يكرران للاحاد والعشرات ، وثانيهما ان النظام الستيني رغم فوائده وتمشيه مع وحدات القياس البابلية لم يكن يجارى نظام العد الطبيعي الذى هو عشرى ، ونستطيع ان نقدر أن الحاسب كان يسمى العدد على النظام العشرى الطبيعي فاذا هو اراد ان يجرى عليه عملية حسابية بدأ بتحويله الى النظام الستيني وهذا التحويل وحده قد يكون اصعب من العملية التى يراد اجراؤها . وربما كان هذا هو السبب فى ان النظام الستينى كان مقصورا على الفلكيين لم ينزل الى مستوى العامة .

اما النظام الهندى الجديد ــ كما نجده عند الاقليدسي ــ فعشرى منازلي برموزه وعملياته : تسع صور متميزة للارقام التسعة، وصورة للصفر ، وكل رقم في منزلة بمثابة آحاد من هذه المنزلة ، فالتسعة في منزلة الآحاد تسعة آحاد وهى فى منزلة العشرات تسع عشرات ، الخ ، هكذا نكتبها وهكذا نجرى عليها العمليات الحسابية .

ولكن ما اصل هذه الصور ؟ هل هي هندية؟ كان الاوروبيون يسمونها الارقام العربية ،وفي القرن التاسع عشر اكتشفوا ان العرب يسمونها الحروف الهندية ، واكتشفوا ايضا ان العرب يستعملون كما بينا مجموعتين من الصور واحدة تستعمل في المشرق والاخرى فى المغرب ، وكلتاهما تخالف الصور التى يستعملها الهنود الى حد ان الهنود انفسهم درجوا على تسمية هاتين المجموعتين بالارقام العربية .

كان البحث عن جواب حاسم موضوعى لهذه التساؤلات دافعا دفع كثيرا من الباحثين لتقصى الحقائق حوله ، نذكر من هؤلاء سمث وكاربنسكي اللذين قاما بجمع اصول كثيرة هندية وعربية وعقد دراسات طويلة خرجا منها بكتاب Hindu-Arabic Numerals سنة ١٩١١ قررا فيه ان اقدم صورة للصفر في الهند تعاصر اقدم صورة له في العالم الاسلامي وان صور الارقام يبدو انها انحدرت من صور حروف ديوانجارية هي اصول الحروف السنسكريتية التى تكتب بها اللغة البراهمية . ولقد قام Kaye (٩) بدراسة اخرى لاصول اخرى كانت نتيجتها انه استبعد ان تكون هذه الصور التي شاعت فى العالمالعربي هندية الاصل ، وقام Coedes (١٠) بدراسات اخرى على اصول في الهند الصينية في محاولة لاثبات ان فكرة الرموز المنازلية العشريةلم تبدأ فيالهند ولكن الهند استوردتها من غيرها . وفي سنة ١٩٢٥ نشر سمث كتابه History of Mathematics وفيه يردد ان بعضا من خيرة الباحثين لا يستطيعون ان يسلموا بان أصل هذه الارقام هندى . وفي

---

(٩) Kaye, G. R. انظر مقالاته «Indian Mathematics» (Calcutta-Smila, 1915). «Indian Mathematics» (Isis, 12, 1919).

(١٠) Coedes, G., Apropos de l'origine des chiffres arabes. Bul. London School of Oriental Studies, 6, 1934.

سنة ١٩٣٥ نشر دتاوسنج كتابهما History of Hindu Mathematics وفيه يعرضان خلاصة دراسة لاصول هندية جديدة تثبت ان صور **الارقام** وصورة الصفر هندية اصلا وانها في الهند اقدم منها في ديار الاسلام وفي الهند الصينية على السواء ، ولكن حججهما لم تكن مقنعة كما ان موضوعيتهما لم تكن فوق الشبهات . الا ان هنالك حقائق ثابتة ينبغي ان تكون لنا كما كانت لهؤلاء الباحثين معالم في طريق البحث . **من هذه الحقائق ان اقدم اشار للارقام الهندية نعرفها في النصوص (الهندية وغير الهندية) جاءت في عبارة للراهب ساويرس سيبخت الذى وضع في دير قنسرين سنه ٦٢٢م كتابا انحى فيه باللوم على اولئك الذين يكتفون بما هو رومي ويظنون ان ليس لدى غير الروم (اى البيزنطيين) ما يستحق المعرفة وهو في سبيل التدليل على ان لدى غيرهم ما هو مفيد يذكر أن الهنود يستطيعون بتسعة ارقام فقط ان يرمزوا الى اى عدد كائنا ما كان .**

من هذه العبارة نستدل على ان خبر الارقام الهندية كان قد اخذ يتسرب الى العراق وسوريا في أوائل القرن السابع الميلادى ، ولعل في العبارة ما يشير الى ان الصفر لم يكن قد دخل في هذه الارقام ، غير ان هذه حجة سلبية فالمؤلفون العرب يعتبرون الارقام تسعة (أحرف) ويضيفون اليها الصفر لا باعتباره رقما ولكن باعتباره اشارة تملأ المنزلة الخالية . ولعل من الجدير ان نذكر ان هذه الاشارة ذاتها استعملها بطليموس والفلكيون من بعده لملء المنازل الخالية في النظام الستيني ، فهى اذن قد تكون هندية وقد لا تكون .

ومن هذه الحقائق ايضا ان كاتبا بيزنطيا من القرن السادس اسمه بوئثيوس Boethius وضع كتابا في الحساب ظل يستعمل في مدارس الاديرة عدة قرون وان له كتابا في الهندسة نجد فيه وصفاً لحصى تستعمل في الحساب وعلى كل منها صورة تدل على رقم معين ، وهذه الصور التى على حصى بوئثيوس هي اقرب الى اشكال الارقام في المجموعتين المشرقية والمغربية منها الى الاشكال التى انتشرت فيما بعد في الهند، والنص ينسبها الى الفيثاغوريين . وقد اطلع فيبكي (١١) على هذه العبارة فذهب في تفسير نشأة الارقام الهندية مذهبا يلخص في ان الهنود وضعوا من قديم تسع صور للارقام تناولها منهم فيثاغوريو الاسكندرية في القرن الثاني الميلادى في عهد ازدهرت فيه التجارة بين الشرقين الاقصى والاوسط ثم سار الهنود في سبيل مستقل فطوروا صور ارقامهم واكملوا نظامهم بصورة للصفر ، وبقي الشرق الاوسط يتعامل بالارقام التسعة فنجم عنها فيه المجموعتان المشرقية والمغربية .

كان ثمة امران يحولان دون قبول نظرية فيبكي : احدهما ان ليس لدينا اى دليل على الاطلاق على ان هذه الارقام كانت تستعمل لا في عهد بوئثيوس ولا قبله ، حتى ولا قبل ان يعمل العالم الاسلامى على نشرها . والثاني ان الحديث عن الارقام جاء في كتاب هندسي وجاء كأنه حشو لو ازيل لما اختل سياق الكتاب . من اجل ذلك ذهب الباحثون الى الترجيح بأن هذا الحديث هو اضافة متأخرة للكتاب قد ترجع الى القرن الثاني عشر . وقد اكتشف فيما بعد مجموعات من هذه الحصى تعود كلها الى القرن الثاني عشر . ونضيف هنا ان الاقليدسي يصف مثل هذه الحصى كسبيل للتخلص من التخت والرمل ، وهذا يؤكد أن فكرتها جاءت بعد انتشار الحساب الهندى على التخت . والحقيقة الثالثة التى يجب ان تؤخذ بعين الاعتبار ان الخوارزمي الذى كان اول من شرح الحساب الهندى يقدم

(١١) Woepcke, F. Introduction au Calcul Gobari et Hawai (Atti dell Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, Vol. XIX).

مجموعة مـن الارقام والعمليـات الحسابيـة تختلف اختلافا جذريـا عما انتشر في المشرق والمغـرب على السـواء – ويظهـر ذلك مـن المخطوطات اللاتينية التي نقلت عنه .

نضيف الى ما تقدم حقيقة رابعة هي ان العلامة ابا الريحان البيروني المتوفي سنة ٤٤٠هـ (١٠٨٤م) يذكر في كتابه تحقيق ما للهنـد من مقولـة ان للهنـود رموزا شـتى وطـرقا حسابية عدة وان ما اخذه عنهم العرب هـو من احسن ما عندهم . وكتاب البيروني مـا يزال من اوثق المصادر عن الفكر الهندى في العصور الوسطى (وقد طبـع في حيدراباد الدكن سنة ١٩٥٨)

على ضوء هذا كله نعود فنلقي نظرية جديدة على الحساب الهنـدى عسانا نهتـدى الـى اصوله .

د – الحساب الهندى في المصادر السنسكريتية

المصادر الهندية الكلاسيكية التي انحدرت الينا معروفة للباحثين ، ومحتوياتها الرياضية معروفة ، ولكن ليس فيها عن هذا الحساب الهندى الذى تصفه الكتب العربية شيء . فكأن الهنود كانوا كالاغريـق يستنكفون مـن الكتابة عن العمليات الحسابية باعتبارها امرا لم يبلغ مبلغ العلم .

المصدر الوحيد المعروف الذى فيه ملامح من هذا الحساب هو The Patiganita of Sridharacarya وقد نشره شوكلا (مـن جامعـة لاكناو) مع ترجمة وشروح بالانكليزية سـنة ١٩٥٩ . ويدلل شوكلا على ان مؤلفه (دهاره) عاش ما بين ٨٥٠ و ٩٥٠ م فاذا صح ذلك يكون دهاره قد عاش في العهد الـذى شرع فيـه الحساب الهنـدى يشق طريقـه في العالـم الاسلامى .

هنالك كتاب The Lilavati of Bhaskara وقد ترجم ونشر اكثر من مرة . ولكن مؤلفه عاش في القرن الثانى عشر بعد ان تأثر الفكر الهندى بالفكر الاسلامى ، وان في الكتاب نفسه طريقة للضرب يعطيها المؤلف اسما عربيا . ففى صدد البحث عن اصول الحساب الهندى الذى وصل الى العرب لا يفيدنا مصدر متأخر ككتاب بهاسكرا (قد يكون تأثر بالفكر العربى) .

وهنالك ايضا مخطوطه بخشالى(١٢) ، وقد عثر عليها حديثا وعقـد عليها كاى دراسـات وهو يرجح انها كراسة طالب يتمرن على اعمـاله الرياضية . ولكن بالاضافة الى ضآلة ما فيها من سمات الحساب الذى تعرفنا عليه يختلف الباحثون في تقدير عمرها . فالعلماء الهنـود يرجعونها الى القرن الثانى الميـلادى ليثبتوا بذلك ان اجدادهم عرفوا الصفر في ذلك الوقت المبكر والباحثون الغربيون يرون انها لا يمكن ان تكون اقدم من القرن الثانى عشر .. ثم هنالك مرجع آخر هو . History of Hindu Maths. للمؤلفين دتا وسنج ، وقد نشراه لاول مـرة سنة ١٩٣٥ واعتمدا فيه على مصادر لا تتوفر لمن لا يعرف السنسكريتية ، الا انهما ينساقان مع نزعة العزة القومية الى حد يجافى الموضوعية ويتعـذر معـه الاعتمـاد علـى احكامهمـا ونتائجهمـا .

بقينا اذن مع مصـدر واحـد سنسكريتى هـو كتـاب دهـاره ، وان مـن حسـن حظ البحث العلمى ان ناشره الاستاذ شوكـلا ثقة في موضوعه ، وقد استعمل من المراجـع ماكان لدى دتا وسنج . الا ان الكتاب نفسه ، كغيره من الكتب الهندية القديمة ، تعطى فيه القواعد الحسابية بأراجيز شعرية موجـزة لامكان معها لكتابة رموز او تفصيل عمليات . وللكتاب شروح ترجع الى عهود متأخرة وهـى تعطى الرموز وتصف العمليات بطرق تتبايـن ولكن ليس من واحد منها يشير الى ان هـذه العمليات كانت تجرى على تخت ، رغم ان اسم

(١٢) Kaye, G. R. The Bakhshali Manuscript (Calcutta, 1927-33).

الكتاب باتيجانيتا يعنى حساب التخت ــ حتى لقد بقينا نجهل العلاقة بين الحساب الهندى والتخت (وبين حساب اليد والتخت) الى ان اكتشف كتاب الاقليدسي سنة ١٩٦٦ .

ومع ذلك فبين الباتيجانيتا وحساب الاقليدسى شبه فالكتاب الهندى يقسم موضوع الحساب الى ٢٩ عملية وتسعة حقول تطبيق ، ويؤكد شوكلا ان هذا التقسيم كان تقليديا جرى عليه الرياضيون الاخرون . ومما يلفت الانتباه ان العمليات تتناول الاعداد الصحيحة جمعا وطرحا وضربا وقسمةوتجزيرا ثم تتناول الكسور بمثل هذا الترتيب بوجه عام . فاذا ذكرنا ان كتب حساب التخت العربية تكاد تتفق في ترتيبها العام وكلها تخالف من هذه الناحية كتب حساب اليد جاز لنا ان نستنتجان‌هذا الترتيب الجديد هندى‌الاصل . اذا سلمنا بذلك تداعى لخاطرنا سؤال : ماذا عن حقول التطبيق التسعة ؟ لانجد لهذه اثرا فى كتب حساب التخت العربية وان كنا نجد بعضها فى مواضع اخرى ؟ هل كان ذلك لان الحساب العرب اكتفوا من الحساب الهندى بارقامه وعملياته واهملوا الحقول التسعةلانها نتاج بيئة غير بيئتهم ؟ مهما يكن الأمر فقد كان في هذا الاهمال خسارة لأن بعض هذه الحقول كان يعالج مسائل ذات قيمة رياضية كالتحليل التوافقى الذى لانعرف حتى اليوم احدا من‌الرياضيين‌العرب عنى به او تنبه اليه.

وقواعد الباتيجانيتا الشعرية الموجزة يفصلها ــ كما اسلفنا ــ شراح متاخرون لايشيرون الى التخت والرمل ولكن اذا نحن قراناها فى ضوء حساب الاقليدسي مثلا فاننا نستطيع ان نتبين ملامح حساب التخت العربى فيها .

• • •

نخلص من ذلك الى ان بين الباتيجانيتا وحساب التخت العربى شبها يدعم الاعتقاد بأن هذا الحساب هندى . ولكن ماذا عن اوجه الخلاف ؟

نشير هنا الى مانراه اهم وابرز هذهالأوجه.

(١) ان التضعيف والتنصيف اللذين لايخلو منهما كتاب عربى في حساب التخت لا نجد لهما اثرا فىالباتيجانيتا ولا فىغيره من المصادر الهندية . ولقد ذهب بعض الباحثين الى انهما اضافة محلية الى الحساب الهندى استدعاها ان الموضوع كان ما يزال في ديار الاسلام كبقية من التقليد المصرى القديم في الضرب بطريقة لتضعيف . ولكن ثمة ما يمنع من قبول هذا الراى . اذ لو كان التضعيف قد بقىفى المنطقة كأثر فرعونى لتوفر امران احدهما او كلاهما : **أولا** لكان التضعيف بقى فى حساب اليد الذى ظل هو الحساب التقليدى في المنطقة من قبل الحساب الهندى **وثانيا** لكان التضعيف ظهر فى الحساب الهندى كطريقة من طرق الضرب الكثيرة التى كان يتبارى في ابتكارها الحساب وفي ذكرها الكتاب . ولكن لانجد للتضعيف‌ذكرا فى حساب اليد ولم نجده يستغل كطريقة عامة للضرب في الحساب الهندى ، الا في مخطوطة باسم‌اللمع فى الحساب لابن الهايم (القرن ١٤م) وهذه تذكر طرقا مختصرة فى‌الضرب‌ومن بينها الضرب‌بالتضعيف،والمخطوطة فى‌حساب اليد . والتضعيف يرتبط فى الكتب العربية بالعبارة «تضعيف بيوت‌الشطرنج» والاقليدسي يعالجه بهذا الشكل ، وعلى اعتبارا ان عملية التضعيف قد اتخذت سبيلها للحساب كسؤال نجم عن لعبة الشطرنج يمكن ان نقدر ان اصل العملية او مسارها يرتبط الى‌حد مابأصل الشطرنج او مساره. ويكاد يكون متفقا عليه ان الشطرنج لعبة هندية (ويدل اسمها على اصلها) جاءت الى العالم الاسلامى عن طريق فارسى ، فهل يمكن أن يكون الحساب الهندى كما عرف في العالم‌الاسلامى‌حسابا هندى‌الاصل وصل الى الاسلام‌من‌بيئةفارسية. ان مجرد ان الشطرنج وصل‌عن‌هذا السبيل‌لايكفى وحده لان يجعلنا نجزم بأن‌علم الحساب كله كان هذا شأنه مادمنا

لانملك دليلا يؤكد ان الفرس عرفوا الحساب الهندى قبل العهد الاسلامي وكل ما نستطيع ان نؤكده ان عمليتي التضعيف والتنصيف ليستا رواسب فرعونية وانما جاءتا الى العالم الاسلامى كجزء من النظام الحسابى الجديد فان لم نجد هذا النظام في الاصول السنسكريتية المعروفة افلا يمكن أن يكون يمثل مذهبا من المذاهب الهندية غير التي تذكرها هذه الاصول .

(٢) ان طرح التسعات او غيرها لتحقيق صحة الناتج طريقة تذكرها كتب حساب التخت وحساب اليد العربية وبعضها ينسبها كما ذكرنا للهنود ، ولكننا لانجد لهذه الطريقة اثرا فى الكتب الهندية المتقدمة ،هذا بالرغم من انهم جروا تقليديا على قسمة الحساب الى ٢٩ عملية وتسعة حقول تطبيق كل حقل ينقسم الى عدة فروع . هنا ايضا نميل الى الترجيح السالف وهو ان الحساب الهندى الذى وصل الى العرب يمثل مذهبا رياضيا غير مذاهب النصوص الكلاسيكية .

وسواء اصبنا او اخطأنا فى هذه النتيجة التى وصلنا اليها وهى ان حساب التخت العربي يمثل مذهبا هنديا غير مذاهب الكتب الكلاسيكية فان ظاهرتين لابد من الاشارة اليهما لما لهما من دلالة .

اولاهما : ان المصادر العربية لاتتكلم عن حساب هنود أو كتب حساب ولا نجد فيها لفظا هنديا واحدا ، رغم انتشار الحساب الهندى بين العرب واستقراره في صفوفهم ، وليس الحال كذلك مع الفلك الهندى فان المصادر تتكلم عن فلكيين هنود وكتب فلك هندية وتورد فى هذا المجال الفاظا هندية ، هذا بالرغم من ان الفلك الهندى لم يحظ بما حظى به الحساب من استقرار .

أما الثانية فهى ما يلى : يتصدى الخوارزمى لوضع كتاب في الحساب الهندى يقدم فيه للعالم الاسلامى الارقام الهندية والعمليات الاساسية وتسجل له المصادر العربية انه اول من كتب في الحساب الهندى ، ولكن لا اشكال الارقام التى يعطيها ولا العمليات الحسابية التى يصفها يقبل بها العالم الاسلامى وانما هو يجمع على نظام حسابى آخر يكاد المغرب لا يختلف فيه عن المشرق الا في صور الارقام وهو يختلف جذريا عن حساب الخوارزمي .

نستطيع ان نفهم ان يكون فى القارة الهندية مجموعات شتى من صور الارقام وطرق شتى للعمليات الحسابية وقد ذكرنا ان البيرونى اشار الى اختلاف الصور والطرق عندهم وذكر ان ما اخذنا هو من احسن ما لديهم ونستطيع ان نفهم ان الخوارزمي اطلع على نظام من هذه الانظمة الهندية فبسطه فلم يقبل عليه الناس ولكن ما يصعب تفسيره اجماع الناس على قبول نظام حسابي واحد في وقت كان تبادل الافكار فيه يجرى بطيئا الى حد ان حاسبا دمشقيا من القرن العاشر كان يعمل بالكسور العشرية فلم يعلم بذلك حساب بغداد وما عداها الى ان جاء غياث الدين الكاشى في القرن الخامس عشر فابتكر هذا النظام الكسرى الذى كان قد بلغ من العمر في دمشق خمسة قرون .

كيف تم هذا الاجماع ومن هم الجنود المجهولون الذين دفعوا به الى الناس او دفعوا الناس اليه ؟ استميح القارىء عذرا اذا أنا فى معرض الاجابة عن هذا التساؤل قدمت تفسيرا لى يراه الباحثون كنظرية فيبكى فرضا معقولا يحتاج كيما يصبح حقيقة الى دليل :

كما كان الفلكيون فى الاسلام يعملون فى بروجهم العاجية بالنظام الستينى في حين كان العامة يجرون حساباتهم بعقد الاصابع وبعمليات عقلية مضنية ، كذلك كان للرياضيين الكلاسيكيين فى الهند مذاهبهم الرياضية التى نجدها فى السوهانتات فى حين كان العامة يتلمسون سبيلهم نحو نظام حسابى سهل . ولقد استطاع هؤلاء ، وليس كبار الرياضيين ، ابتكار

مجموعات رمزية على نظام عشرى ، ولعل هذه المجموعات كانت تتباين من مكان الى مكان ، فتتقارب اذا اتصل المكانان بالتجارة وتتباعد اذا قطع ما بينهما من صلة ، ولكن يبدو ان احد هذه الانظمة على الاقل قد اخذ يتسرب الى الشرق الأوسط عن طريق التجارة حتى اتيح لساويرس سيبخت ان يعرف عنه وينوه بقيمته سنة ٦٢٢م .

ولعل التجار فى فارس والعراق والبلاد العربية السورية قد عرفوا بهذا النظام عن طريق التجارة البرية مع الهند ، ولعلهم اخذوا (على خجل واستحياء) يجرون العمليات الحسابية على التخت والرمل وباستعمال الارقام الهندية ولعل التجار في مصر وشمالي افريقيا قد عرفوا بالنظام عن طريق التجارة البحرية مع الهند ، ولعلهم كجيرانهم في المشرق قد اخذوا بالنظام الهندى فعملوا به في معاملاتهم في حين كان الفلكيون وكبار الرياضيين يتعالون عن حساب العامة قانعين بنظامهم الستينى ، حتى اذا اخذت الاذهان تتركز على الفكر الهندى منذ عهد الخليفة المنصور ثم كتب الخوارزمي كتابه عن الحساب الهندى ، نظر هؤلاء فوجدوا ان مالديهم خير مما جاء به الخوارزمي فنشروه وكان نتيجة ذلك حساب التخت ومجموعتان من الارقام : مشرقية ومغربية اختلفتا لانهما جاءتا من طريقين مختلفتين وعاشتا في المشرق والمغرب فى بيئتين متباعدتين . فرض لا يصير حقيقة الا اذا ثبت ان حساب التخت كان يستعمل فعلا قبل عهد الخوارزمي ، وقد لانجد دليلا على ذلك ، فما يكتب بالرمل يذهب مع الرمل وتذروه الرياح ، على اننا سنذكر بعد قليل ما قد تكون دليلاً على ان الارقام الهندية كانت فى عهد الخوارزمي تستعمل فى كتابات تجرى بين الناس .

هـ ـ بين الحساب الهندى وحساب اليد

كاجورى وسمث وغيرهما ممن كتبوا في تاريخ الرياضيات فى اوائل هذا القرن عرفوا ان الحساب الهندى دخل الى الشرق الاوسط على نظام حسابى محلى ، ولم يكونوا يعرفون بالتفصيل الذى ذكرناه سمات كل من النظامين فتصوروا ما جرى بينهما أشبه بصراع كان من نتيجته اندحار النظام المحلى واستقرار النظام المجلوب . وقد تنبه مدفوى الى خطأ هذا التصور واشار اليه في بحثه عن حساب ابى الوفاء . فالواقع ان ما نسميه حساب اليد كان نظاما رياضيا شاملا فيه العمليات الحسابية وفيه ما يتبعها من تطبيقات تفرضها الحياة العامة والتفكير الرياضى . وما جاء به الحساب الهندى كان عمليات جديدة استبدلت بالعمليات القديمة . وما جرى فى العهد الاسلامي كان مقابلة بين النظامين لاخذ احسن ما فيهما . ونستطيع ان نتتبع خطوات هذه المقابلة . فالاقليدسي (القرن ١٠) يكتب في الحساب الهندى فيبين مزاياه على حساب اليد ويشير الى نقائصه ويحاول تعديلها . وابو الوفاء (القرن ١٠) يكتب في حساب اليد ويبدى ان بالامكان تعديل عملياته بحيث يستغنى عن العقد ويستغنى عن استجلاب رموز هندية واستعمال التخت والرمل . ثم يكتب ابن طاهر (توفي سنة ١٠٣٧) كتابه «التكملة» فيفصل فيه الانظمة الحسابية كلاً على حدة ، فاذا هو ذكر عمليات الحساب الهندى على الصحاح والكسور جاء الى حساب اليد فاكتفى بوصف طرقه المختصرة في الضرب والقسمة ، مما ليس في الحساب الهندى ، ثم انصرف الى اشياء اخرى كالنسبة والتناسب والاعداد غير النسبية ... الخ . وكوشيار (١٠/١١) يحاول ادخال عمليات الحساب الهندى على النظام الستينى محافظا على سماته المميزة ، وكاتب مجهول يضع كتابا باسم الهندى المنتزع من الكافى (المخطوطة ٨٤ في القاهرة) يحاول فيه ان يعدل حساب اليد نفسه بحيث يدمجه بالحساب الهندى . ثم تتوالى الكتب ولعل كتاب « مفتاح الحساب» للكاشى (المتوفى سنة ١٤٣٦/٧) « وخلاصة الحساب » لبهاء الدين العاملي (حوالى ١٦٠٠) يمثلان قمة ما وصل اليه الحساب الاسلامى ،

وفيهما نجد ملامح العمليات الحسابية كما استقرت في عهد النهضة الاوروبية ،ممزوجة مع كثير غيرها من العمليات لقد استطاع الحسّاب المسلمون ان يطوروا الانظمة ليخلصوا منها النظام الحسابي الذي نألفه ولكنهم لم يجدوا الجراة على غربلة العمليات الكثيرة التي توصلوا اليها واختيار اسهلها ثم نبذ ما عداها فهذه مهمة قام بها رياضيو القرن السادس عشر الاوروبيون.

ونستطيع ان نلخص الافكار الرياضية الجديدة التي جاء بها الحساب الهندي الى العالم الاسلامي بما يلي :

١ ــ طريقة منازلية عشرية كاملة لكتابة الاعداد بأرقام تسعة ومعها الصفر .

٢ ــ فكرة ناضجة عن الكسر العادي المطلق من غير قيد ، مع طريقة رمزية للدلالة عليه بالارقام السابقة .

٣ ــ خطوات مرسومة محددة لاجراء العمليات الحسابية التي تجرى بحساب اليد بطرق عقلية غير محددة .

٤ ــ طريقة لايجاد الجذر التكعيبي ، فهذا لاتعطي كتب حساب اليد طريقة لاستخراجه. ويمكن ان نقول القول نفسه بخصوص الجذر التربيعي فأبو الوفاء لا يبين كيف يستخرجه والكرجي يعطي لاستخراجه طريقة قد تكون مقتبسة من حساب التخت وهي تعتمد على المتطابقة :

(أ+ ١٠ب)٢ = أ٢ + ٢اب عشرات +ب٢ مئات

أما الجذر التكعيبي فيصف الاقليدسي طريقة استخراجه ويؤكد انه لم يجد من يعرف ذلك من معاصريه ومن وفى الموضوع حقه من سابقيه وطريقة الاقليدسي تعتمد على المطابقة :

(أ+١٠ب) ٣ =أ٣+٣أ٢ب عشرات +٣اب٢ مئات +ب٣ الوف

وقد يكون الاقليدسي قد ابتكر هذه الطريقة وحده ولكنه بالتأكيد قد تأثر الحساب الهندي في ابتكاره. وقد اعطى كوشيار طريقه لاستخراج الجذر التكعيبي في السلم الستيني جعلها كملحق لمقالتين في اصول حساب الهند ، وطريقته تعطي هذا الجذر لأي درجة من التقريب يشاء الحاسب .

اما ماندين به للحسّاب العرب فهو :

١ ــ دمج حسابي التخت واليد وخلق نظام حسابي يستغنى به عن العقد والتخت والمحو والنقل .

٢ ــ ابتكار الكسور العشرية ، ويعزى الفضل في ذلك الى الاقليدسي وسنبحث في ذلك بعد قليل .

٣ ــ ابتكار طريقة عملية لايجاد مفكوك (س +ص)ن هي بعينها ما صار يسمى فيما بعد بمثلث **بسكال** . واقدم صورة لهذا المثلث انحدرت الينا نجدها فى كتاب نصير الدين الطوسى، ولكن الذى ابتكر الطريقة هو عمر الخيام (القرن ١١) وقد استعملها هو ومن خلفه لايجاد الجذور الرابع والخامس وما بعدهما بمثل ما استعمل مفكوكا (س+ص)٢،(س+ص)٣ لايجاد الجذرين التربيعي والتكعيبي . اما صورة **الطوسي** لمثلث بسكال فعلى هذا الوجه :

٧					
٢١	٦				
٣٥	١٥	٥			
٣٥	٢٠	١٠	٤		
٢١	١٥	١٠	٦	٣	
الخ .. ٧	٦	٥	٤	٣	٢

٤ ــ وضع قواعد محددة لتقريب الجذور بدات بقاعدة الخوارزمي √م٢+ب = م+ ب/٢م ولكن الحساب لم يرضوا عنها فوضعوا قواعد

اخرى ثم استقروا على القاعدة $\sqrt{\text{م}^{٢}+\text{ب}}=\text{م}+\frac{\text{ب}}{٢\text{م}+١}$ وصار المخرج ٢م + ١ يسمى بالمخرج الاصطلاحي .

ثم عممت هذه القاعدة فصارت بالشكل $\sqrt{\text{م}^{\text{ن}}+\text{ب}}=\text{م}+\frac{\text{ب}}{(\text{م}+١)^{\text{ن}}-\text{م}^{\text{ن}}}$ وهذا المخرج سمي ايضا بالمخرج الاصطلاحي ، اما طريقة تقديره فبواسطة فك (م + ١) ن على طريقة مثلث بسكال وقد سموها طريقة اصول المنازل ، واصول المنازل هذه تقابل ما يسمى الآن « binomial wefficients »

و ــ الاقليدسي والكسور العشرية

ابو الحسن احمد بن براهيم الاقليدسي
لم نكن نعرف عنه شيئا قبل ان يكتشف كتابه الفصول فى الحساب الهندى، فعرفنا انه كتب في دمشق سنة ٣٤١ هـ . اما لقبه الاقليدسي فلقب كان يلحق من ينسخون كتاب اقليدس لبيعه ، فلعله كان يتكسب بنسخه كما صنع ابو علي الحسن بن الهيثم .

وهنالك اشياء محددة يعتز بها الاقليدسي فى كتابه ، من هذه انه اول من بحث فى التكعيب والجذر التكعيبي ، ومنها انه اثرى حساب التحت بأن ادخل فيه كل (طرائف) حساب اليد ومنها ايضا انه حاول تعديل حساب التخت بحيث يمكن اجراؤه بالحبر على الورق .

وقد يكون ثمة ما لا نسلم به للاقليدسي التسليم كله بصدد هذا الذى يزعمه، فتعديل حساب التخت كان على ما يبدو غاية استهدفها كثير من الحساب ، والتعديل الذى استقر في النهاية لم يكن هو الذى قدمه الاقليدسي فى فصوله . غير اننا على كل حال ندين له بأمرين على الاقل احدهما انه اعطانا في كتابه ذخيرة كبيرة من المعلومات لا تتوفر في غيره واهمها انه على ما نعلم اول من بحث في الكسور العشرية وقد استعمل لها شرطة تفصل الارقام الصحيحة عن الكسرية .

وقبل ان يكتشف كتاب الاقليدسي كان الظن السائد ان اول من بحث في الكسور العشرية هو الكاشي . وكان سمث وسارتن وغيرهما من مؤرخي الرياضيات ينسبون بعض الفضل الى عدد من الحسّاب العرب واللاتين اذ حرموا حول الفكرة ، وكل هؤلاء ممن جاءوا بعد الاقليدسي .

والاقليدسي يعرض الكسور العشرية على سوية مع الكسور العادية والكسور العربية التقليدية . ويبدو انه تنبه اليها بالمقايسة بالكسور الستينية ، وعلى هذا فهو لا يبدى اعتزازا كبيرا بها . اما الكاشى فيبدو أكثر اهتماما بأمرها واعتزازا بابتكار فكرتها ، ولكن اعتزاز الكاشى يدفعه اكثر من مرة ان ينسب الى نفسه من حيث لا يدرى ما قد سبق اليه. وهو يعالج الكسور العشرية ايضا بالمقايسة مع الستينية، ويسميها الأعشارية . اما طريقة كتابتها عنده فاذا اراد ان يكتب ٢٨و١٧ مثلا كتب ١٧٢٨ ويجعل الجزء الكسرى بلون خاص مميز ، او يكتبها في جدول بالشكل $\frac{\text{ثاني الكسور}}{٨}$

صحاح	كسور		صحاح	أول الكسور
١٧	٢٨	أو يجعلها	١٧	٢

، او هو قد يكتب ١٧٢٨ من ثاني الاعشار ، وكل هذه الطرق يستعملها في الكسور الستينية .

والاقليدسي يضرب المقدار الكسرى بضرب الجزء الصحيح على حدة والكسور على حدة ثم ضم الناتجين وهذا ما يصنعه في الكسر العادى ، ولا يبدو انه لاحظ ان الضرب يمكن ان يجرى عاديا الا في حالة التضعيف ، اما الكاشي فيضرب ٣و١٤ فى ٧.٠و٢٥ كما يضرب ١٤٣ فى ٢٥٠٧ ثم يعين المنازل الكسرية . وقد عد سارتن ان ستيفن هو صاحب الفضل

الاكبر في ابتكار الكسور العشرية لانه وضع سنة ١٥٨٥ عنها كتيبا باسم Le Disme وفيه يتجلى ادراكه للفكرة الجديدة . ولا شك ان ستيفن قد ادرك اهمية الفكرة اكثر من الكاشي والاقليدسي ، لكنه جاء بعد الاول بقرن وبعد الثاني بسبعة قرون . ومع ذلك فطريقته في كتابة هذه الكسور اسوأ من طريقتيهما فهو يكتب ١٧و٢٨ بالشكل (٢) ٨ (١) ٢ (٠) ١٧ أو قد يكتبها بالشكل ١٧/٢٨ ، وهذا الشكل استعمله من قبله **كرستوف رودلف** سنة ١٥٣٠ في كتاب له في الحساب ومن اجل ذلك عده سمث صاحب الفضل الاول في فكرة الكسور العشرية. الا اننا نعرف اليوم ان رودلف لم يكن مبتكرا في ذلك ففي كتاب القرن ١٥ الذى نشره **فوجل** Vogel **وهينجر** Hunger (١٣) نجد أمثال ٥ر١٥٣ تكتب بالشكل ٥/١٥٣ والمؤلف يسمي هذه الطريقة بالطريقة التركية وعلى هذا يمكن ان نقرر ان لا رودلف ولا الكاشي كان مبتكرا للطريقة فقد كان آخرون قد جروا عليها في العالم الاسلامي .

فهل كان الاقليدسي أول حاسب في العالم خطرت له فكرة الكسور العشرية ؟ مبلغ علمنا انه أول حاسب في الاسلام كتب عنها ، وان الفكرة نسيت من بعده حتى اكتشفها الكاشي بعد خمسة قرون. ولكن نيدهم Needham (١٤) يرى ان اغلب معارفنا الرياضية حتى عصر النهضة الاوروبية قد سبق اليها الصينيون ، وهو بخصوص الكسور العشرية يذكر انهم من قديم استعملوا مقاييس على سلم عشرى ومن ثم كان التعبير بالكسور العشرية عندهم مألوفا كتعبير البابليين بالكسور الستينية .

اننا ما زلنا نجهل الكثير عن نشأة العلم الصيني ، وما يذكره نيدهم نجده احيانا غير مقنع او بحاجة الى دليل قوى ، الا اننا مع ذلك نعرف ان بعض الخبرات الصينية قد انتقلت الى العالم الاسلامى في وقت مبكر ، من ذلك تقاليد خاصة في الكيمياء والتنجيم وعمل بعض الطلسمات والمثلثات السحرية ، واهم من هذا كله طريقة بدائية للطباعة .ولكن نستبعد أن افكارا مجردة كفكرة الكسور العشرية قد تم نقلها . فاذا كان الصينيون قد عرفوا الكسور العشرية قبل الاقليدسي فأغلب الظن أنه لم يأخذها عنهم فان لم يكن قد ابتكرها بنفسه فلعله لقيها عند حاسب من حساب عصره الذين قابلهم .



ثالثا العرب والارثماتيكا

قدمنا ان الأرثماتيكا الاغريقية تنصب على موضوعات في الحساب ندخلها اليوم في نظرية الاعداد . وقد وصل الينا من هذه الموضوعات كتابان . اولهما كتاب اقليدس المشهور وهو يعالج الاعداد على اساس هندسي ويتناول النسبة والتناسب والمقادير غير النسبية . والثاني كتاب نيقوماخس الجرشي وقد ترجمه ثابت بن قرة ففقد الاصل وبقيت لنا الترجمة، وقد نشرها الاب ولهلم كوتش في بيروت سنة ١٩٥٣ باسم كتاب المدخل الى علم العدد .

وابن النديم صاحب الفهرست ينسب لأبي الوفاء ترجمة كتاب **لهيبارخس** في العدد وابو الوفاء نفسه يذكر في كتابه في الحساب انه ترجم لهيبارخس كتابا في العدد كما يشير الى انه بحث في العدد واقسامه ولكن لم يصل الينا من ذلك شيء ولا نعلم ان هيبارخس (وتسميه الكتب العربية ابرخس) قد كتب في

(١٣) H. Hunger and K. Vogel, Ein By Zantıneches Rechenbouch Des 15. Jahrhunderts, (Wein, 1963).

(١٤) J. Needham, Science and Civilisation in China, Vol. 3, Cambridge, 1959.

العدد ، وقد يكون ما ترجمه ابو الوفاء كتابا لأحد اغريقي الاسكندرية المتأخرين .

وعلى كل حال فكتابا اقليدس ونيقوماخس كانا المصدرين الرئيسيين لدراسة العرب لنظرية الاعداد ، واعتمادا على هذين المصدرين اسهم العرب فى هذا الميدان ، ولعل من خيرة ما انتجوه ثلاثة كتب :

الاول : رسالة لثابت بن قرة (القرن ٩) في الاعداد المتحابة وفيها يضع ثابت قواعد للاعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابة يمكن ان نعبر بها بالشكل التالي :

(١) ليكن ج = ١+٢+...+٢ن ، فاذا كان ج أوليا يكون ٢ن.ج عدداً تاما ويكون ٢ن. ع زائدا اذا كان ع اوليا اقل من ج ، وناقصا اذا كان ع اوليا أكبر من ج ويكون النقص والزيادة معادلين للفرق بين ج ، ع .

(٢) ليكن ع ، ع « أوليين مختلفين اكبر من ٢ وليكن ع = ع ع » . ٢ن فيكون مجموع قواسم ع التى هي اقل من ع مساويا ج حيث .

ج = (٢ن+١ ـ ١) (١+ع+ع «) + (٢ن – ١) ع ع » .

وعلى هذا يكون ع زائدا او ناقصا حسب كون ج ـ ع موجبا او سالبا .

(٣) يكون ٢ن . ج ، ٢ن . ع ل متحابين اذا كان ع = ٣×٢ن – ١ ، ل = ٣×٢ن–١ – ١ ،

ج = ٩×٢ ^٢ن – ١^ ـ ١ حيث ع ، ل ، ج اعداد اولية اكبر من ٢ او بعبارة اخرى : اذا كان ع = ج+٢ن ، ل = ج – ٢ن ، ج =١+٢+..+٢ن ، ج= (٢ن^+١^ +٢ن^–٢^) ×٢ن^+١^ ـ ١ .

وان من حق **ثابت بن قرة** علينا ان نسجل له اننا لا نجد فى الرياضيين من اضاف شيئا ذا بال الى قواعده في قواسم الاعداد من القرن التاسع الى القرن السابع عشر عندما تناول هذه القواعد **ديكار وفرمات** Fermat فمدا فى اسبابها ، ولكننا نجد من اخطأوا فهم قواعده او لم يحسنوا تطبيقها ، ومن هؤلاء الكاشي في مفتاح الحساب .

واما الكتابان الآخران فهما «كتاب التكملة» **لابن طاهر** ، وقد اشرنا اليه اكثر من مرة ، وكتاب « مراسم الانتساب فى علم الحساب » (المخطوطة ١ ، ١٥٠٩ جار الله) **ليعيش بن ابراهيم بن يوسف بن سماك الاموى** (القرن ١٤) . وهذان الكتابان لا يضيفان جديدا لما يذكره ثابت ولكنهما يبحثان فى نواح اخرى من نظرية الاعداد لانعرف غيرهما من بحث بها من علماء العصر الاسلامي ، ونذكر من هذه :

١ ــ قواعد لجمع متواليات مثل

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots$$

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \cdots$$

$$١^{٤} + ٢^{٤} + ٣^{٤} + \cdots$$

$$١\times٢ + ٢\times٣ + ٣\times٤ + \cdots$$

٢ ــ العمليات الحسابية على الجذور الصماء ذات الحد الواحد وذات الحدين والثلاثة .

٣ ــ الاعداد المسطحة والاعداد المجسمة وسنبحث فى هذه ببعض التفصيل :

لنأخذ المتواليات الحسابية الآتية :

(١) ١،٢،٣،٤،٥،....

(٢) ١،٣،٥،٧،٩، ....

(٣) ١،٤،٧،١٠،١٣، ..

(٤) ١،٥،٩،١٣،١٧،. الخ

فاذا جمعنا حدود كل متوالية على التوالي نشأت عندنا المتواليات : -

(١ أ) ١،٣،٦،١٠،١٥، ...

(٢ أ) ١،٤،٩،١٦،٢٥، ...

(٣ أ) ١،٥،١٢،٢٢،٣٥، ..

(٤ أ) ١،٦،١٥،٢٨،٤٥، .. الخ

سمى الاغريق حدود المتواليات (١ أ) ، (٢ أ) ، ... الخ بالاعداد المسطحة ، فالمتوالية (١ أ) تعطي مثلثات كما يتبين من الشكل :

١ .
٢ . .
٣ . . .
٤ . . . . الخ

والمتوالية (٢ أ) حدودها مربعات . والمتوالية (٣ أ) حدودها مخمسات وهكذا . وهذه كلها مضلعات مسطحة . فاذا جمعنا حدود المتواليات (١ أ) ، (٢ أ) ، ... الخ تنشا معنا المتواليات :

(١ ب) ١،٤،١٠،٢٠،٣٥، ...

(٢ ب) ١،٥،١٤،٣٠،٥٥، ...

(٣ ب) ١،٦،١٨،٤٠،٧٥، ...

(٤ ب) ١،٧،٢٢،٥٠،٩٥، ...

وهذه المجسمات ثلاثية ، فرباعية ، فخماسية ، فسداسية الخ ..

والفكرة حتى هذا الحد اغريقية ترجع الى فيثاغورس في القرن السادس ق.م. ولكن ابن طاهر والاموى يعرضانها كمتواليات ويعالجانها معالجة حسابية فيستخرجان لكل من المسطحات والمجسمات قاعدة عامة تعطي الحد العام وقاعدة تعطي مجموع الحدود .

وقد لا نعدو الصواب اذا قلنا ان هذا هو قمة ما وصل اليه بحث المتواليات المحدودة حتى اواخر القرن السابع عشر عندما تمكن الرياضيون من استعمال الرمزية الجبرية في وضع قواعد عامة تنتظم هذه وغيرها من المتواليات المحدودة .



الخلاصة :

فصفوة القول اذن ان الناس في اول عهد الاسلام كانوا يجرون على نظامين حسابيين احدهما النظام الستيني وكان مقصورا على الاعمال الفلكية والتنجيمية ، وحساب اليد وكان هو الحساب التقليدى ، يجرى عليه العامة ، ويتبعون قواعد تقريبية منها ما ليس صحيحا ، وربما كان هنالك نظام ثالث هندى الاصل يجرى على التخت والرمل ويقتصر امره على التجار . وفى القرن التاسع بدا اتصال الاسلام بالفكر الهندى فقام الرياضيون يبسطون حساب التخت للناس وقام آخرون يكتبون فى حساب اليد ويضعون له قواعد على اساس رياضي سليم . وكان من نتيجة ذلك ان وضع نظام حسابي فيه احسن ما فى هذه الانظمة وليس فيه نقائصها .

وفى غصون ذلك كان المسلمون قد عرفوا الفكر الرياضي الاغريقي فأضافوا الى ذخيرتهم الحسابية ما في هذا الفكر من نظرية الاعداد وفي هذا وذاك حقق العرب ابتكارات واضافات

فكان الحساب العربي فى جملة ما تناوله رواد النهضة الاوروبية منذ القرن الحادى عشر فتوفروا على دراسته وقد استطاعوا في القرن السادس عشر ان يصفوه ويستبقوا من طرقه احسنها ثم هم بعد قرن بدأوا يضيفون اليه اضافات رصينة فكانت رياضيات عصر الآلة البخارية التى صرنا الان نسميها بالتقليدية نسبة الى رياضيات عصرالاكترونات والفضاء.

• • •

تذييل

لحظات مع ابن طاهر

ابو منصور،عبد القاهر بن طاهر بن محمد بن عبد الله البغدادى التميمي الشافعي الاسفراييني (توفى سنة ٤٢٩هـ ، ١٠٣٥م).

قلائل هم الحساب الذين نعرف عن حياتهم الخاصة ، ومن هؤلاء ابو منصور ، ابن طاهر فقد كان شافعيا ولذا نجد عنه الكثير في طبقات الشافعية وكان من علماء الكلام ولذا كتب عنه المؤرخون فقد كانوا في العادة يكتبون عن علماء التاريخ واللغة والاصول اكثر مما يكتبون عن الحساب والرياضيين ، وخلاصة ما نجد عنه انه ولد ونشأ في بغداد ثم رحل مع والده الى خراسان فاستقر في نيسابور وفيها تعلم وكان ذا ثروة فلم يبخل بها على العلماء ، ثم هو علم فى فنون كثيرة حتى عد من ائمة الاصول وصار صدر الاسلام فى عصره ولم يتكسب بعلمه قط. ثم فارق نيسابور على اثر فتنة قامت فيها واستقر فى اسفرايين حيث مات ، وقد قال السبكي : من حسرات نيسابور اضطرار مثله الى مفارقتها .

ولابن طاهر كتب فى الدين وعلم الكلام، ولكن ما يهمنا من كتبه هنا كتاب « التكملة » فى الحساب وفيه اخذ على عاتقه ان يعرض انظمة الحساب كلها ، وهو يسميها (انواعا) ويعدها سبعة انواع كما يلى :

النوع الاول : في حساب الهند على التخت في الاعداد الصحاح .

النوع الثاني : في حساب الكسور (على الطريقة الهندية) .

النوع الثالث : في حساب الدرج والدقائق .

النوع الرابع : في حساب اليد .

النوع الخامس : يسميه « في معرفة انواع دقيقة في الجذور والكعاب ودقائق الحساب »، وهو حساب المقادير الصماء ذات الحد الواحد والحدين والثلاثة .

النوع السادس : في خواص الاعداد .

النوع السابع : في المعاملات وبعض النوادر الحسابية .

والمؤلف يعرض حساب الدرج والدقائق بالارقام الهندية على التخت ويعرض حساب اليد وقد جرده مما فيه من تعقيدات ، اما الانواع الثلاثة الاخيرة عنده فهي نتاج معرفته للارثماتيكا على خلفية من حساب اليد حتى لنفتقد اى اثر للحساب الهندى فيها . ان كتاب «التكملة» **لابن طاهر** يمثل مرحلة تم فيها دمج الحساب التقليدى بالحساب الهندى من ناحية ودمجه بالرياضيات الاغريقية من ناحية اخرى ، حتى لنلمح اتجاهين فى الاجراء الحسابي والتفكير الرياضي لم يتح لهما بعد ان يلتقيا .

وفى الصفحات التالية نعرض بعضا من نوادر ابن طاهر فى النوع الاخير .

١ ــ « من أضمر عددا صحيحا فخذ انت بيمينك واحدا ، ومره بتنصيف ما اضمر واضعف انت الواحد الذى معك ، وسله عن الكسر : فان ذكر كسرا فمره بطرح ذلك الكسر وهو نصف درهم ، وانقل انت الى يسارك نصف مافى يمينك ولا تنقص من اليمين شيئا ، وان لم يذكر كسرا فلا تنقل الى يسارك شيئا ثم مره بتنصيف مابقي معه ، واضعف انت مافى يمينك ، وسله عن الكسر ، فان وقع كسر فانقل الى يسارك نصف مافي يمينك ومره بطرح الكسر . ثم على هذا القياس : تأمره بتنصيف مافى يده ابدا وتضعف مافى يمينك ، وتسأله كل مرة عن الكسر ، وكلما وقع معه الكسر فانقل له نصف مافى يمينك الى يسارك ، وهذا الرسم فيه الى ان يفنى ما معه ، فاذا فني ما معه فما حصلت فى يسارك فهو الذى أضمره » .

وهناك اكثر من طريقة لتعليل هذه اللعبة رياضيا ولكن البيان التالي يبين ناحية جديدة بالاعتبار : فليكن العدد المضمر س ، وتضع فى يمينك ١ وحاصل ضربهما س×١=س .

(١) فاذا كان س زوجيا تنصفه فيبقى $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ وتضعف مافى يمينك فيصير ٢ ويبقى حاصل ضربهما س .

(٢) واذا كان س فرديا تستبقى $\frac{\text{س}-\text{١}}{\text{٢}}$ وتضعف مافي يمينك فيصير ٢ ولكن تضع ١/٢×٢=١ فى يسارك، فحاصل الضرب $\frac{\text{س}-\text{٢}}{\text{٢}}$ × ٢=س ــ ١ فاذا اضفت اليه مافى يسارك حصل س .

(١ب) ففي الحالة (١) اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ زوجيا تنصفه وتضعف مافى يمينك فيبقى حاصل الضرب س واذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ فرديا تستبقى $\frac{\frac{\text{س}}{\text{٢}}-\text{١}}{\text{٢}}$ وتضعف مافى يمينك فيصير ٤ وحاصل الضرب س ــ ٢ فاذا اضفت اليه نصف مافى يمينك صار المجموع س .

(٢ب) وفى الحالة (٢) يمكن تبيان صحة القاعدة سواء كان $\frac{\text{س}-\text{١}}{\text{٢}}$ فرديا او زوجيا وعلى هذا يستمر حاصل ضرب ما بقى من العدد المضمر فى ماصار فى اليمين مضافا اليه مافى اليسار مساويا للعدد المضمر الى ان يفنى العدد المضمر فيكون قد انتقل كله الى اليسار. والقيمة التاريخية لهذه المسألة انها تذكرنا بالطريقة المصرية القديمة في الضرب بالتضعيف والتنصيف .

٢ ــ « اذا أضمر عددا فقل له زد عليه نصفه ، وسله عن الكسر ، فان ذكر فيه كسرا فذلك الكسر نصف درهم ، فقل له زد على مامعك نصف درهم ، وخذ انت لهذا الكسر واحدا ، وان لم يذكر لك كسرا فلا تأمره بزيادة نصف درهم ولا تأخذ انت الدرهم الذى كنت اخذت مع الكسر . ثم مره ان يزيد على ما اجتمع معه مثل نصفه ، وسله عن الكسر ، فان ذكر فى مامعه كسرا فمره بزيادة نصف درهم عليه ، وخذ انت لهذا الكسر درهمين ، وان لم يكن معه كسر فلا تأمره بزيادة نصف درهم على مامعه ولا تأخذ انت الدرهمين . ثم مره ان يطرح مما معه تسعة تسعة ابدا ، وخذ انت لكل تسعة يلقيها اربعة ، ولكل تسعين اربعين ، ولكل تسعمائة اربعمائة ، وعلى هذا القياس ، وزد ماتأخذه على ما اخذت للكسرين

او لاحدهما ، ان كنت اخذت لذلك شيئا . فاذا بقي معه مالا يمكن طرح تسعة منه ، او لم يبق معه شيء ، فما حصل معك هو الذى اضمره ، ومتى وقع الكسر فى حسابه فى المرة الاولى فحسب فالباقي معه ثلاثة ، وان وقع الكسر فى المرة الثانية فالباقي معه خمسة ، وان وقع لـه الكسر فى المرتين فالباقي معه ثمانية » .

تتبين لنا صحة اللعبة اذا ذكرنا ان العدد المضمر واحد من الانواع الاربعة التالية :

ففي النوع الاول يكون الناتج ٩س ولا يبقى من طرح التسعات شيء .

وفى النوع الثاني يكون الناتج ٩س+٣ ويبقى من طرح التسعات ٣ .

وفى النوع الثالث يكون الناتج ٩س+٥ وفى الرابع ٩س+٨ .

٣ ــ « اذا اضمر عددا لايزيد على مائة وخمسة ، فمره ان يطرح منه خمسة خمسة ابدا حتى لايبقى منه شيء او يبقى معه اقل من خمسة ، فان لم يبق منه شيء فلا تأخذ له شيئا وان اخبر ان الباقي بعد طرح الخمسات منه اقل من خمسة ، واخبر به ، فخذ لكل واحد منه أحدا وعشرين ، واحفظه. ثم مره ان يسقط مما اضمره كل سبعة فيه ، فان لم يبق منه شيء فلا تأخذ فى هذه الكرة شيئا ، وان بقي معه اقل من سبعة فخذ لكل واحد مما بقي معه خمسة عشر . ثم مره ان يسقط مما اضمر كل ثلاثة فيه ، فاذا بقي معه اقل من ثلاثة فخذ لكل واحد منه سبعين ،وان لم يبق معه شيء فلا تأخذ لهذه المرة شيئا .

ثم اجمع ما حصل معك والق منه مائة وخمسة ، كل ما أمكن منه ، فان بقى منه مائة وخمسة أو اقل منها فالباقي هو الذى اضمره» .

وابن طاهر يفيض في شرح المبدا الذى تنطوى عليه اللعبة فيبين اننا اذا اخذنا عددين (م،ل) متباينين اى ليس بينهما عامل مشترك فأى عدد اقل من او يساوى م ل يعرف اذا عرفنا باقي قسمته على كل من م،ل. ثم ينتقل لشرح العمل فى حالة اخذنا ثلاثة اعداد او اربعة او خمسة .

ولهذه المسألة قيمة تاريخية بالاضافة الى قيمتها الرياضية . ففي كتاب صيني يرجع الى القرن الرابع الميلادى نجد سؤالا هو وحله يحملان من الشبه بما يصنعه ابن طاهر ماقد يدفعنا الى التفكير بأن ههنا أثرا صينيا فى الرياضيات الاسلامية المبكرة .

ولكن نيقوماخس يحل السؤال الصيني نفسه بالطريقة نفسها ، وابن الهيثم يأتي بسؤال مماثل ويحله بطريقتين متشابهتين ، وبراهماجيتا الهندى (القرن ٧م) يتعرض للسؤال الصيني نفسه . وعلى هذا يمكن ان نجزم بان ابن طاهر اخذ مسألته عن نيقوماخس او ابن الهيثم او الفكر الهندى ولم يأخذها من مصدر صيني .

٤ ــ « اذا كان للسائل اولاد ذكور وانات فأردت اخباره (بعدد) كل منهما ، او اخذ باحدى يديه دنانير وفى الاخرى دراهم : فقل له يخبرك بجملة العددين بعد الجمع بينهما ، فما كان فأضعفه واحفظ ضعفه ثم مره ان يزيد على مافى يمينه مثله ، أو يضربه فى اثنين، وان يزيد على الذى فى يساره مثليه ، او يضربه فى ثلاثة ، ويجمع المبلغين ، ويخبرك بالمبلغ ، فما كان فاطرح منه ذلك المحفوظ فما بقي فهو الذى فى يساره . والباقي الى تمام الجملة

التي اخبرك بهـا فى المرة الاولى هـو الذى في يمينه . وهكذا اخراج الذكور والاناث اذا اخذ الذكور فى يمينه والاناث فى شماله .

٥ ــ فصل فى اخراج الخاتم .

اذا اخذ خاتمك فى احدى يديه وخاتم انسان آخر فى اليد الاخرى ، فقل له خذ فى اليد التي فيها خاتمي اربعة ، وفى اليد التي فيها خاتم الاخر ثلاثة ، فاذا فعل ذلك فمره ان يزيد على الحساب الذى فى يمينه خمسه امثاله وعلى الحساب الذى في يساره اربعة امثاله ، فاذا فعل ذلك فمره بأن يجمع المبلغين ، فاذا فعل ذلك فمره بأن ينصف المبلغ ، وسله عن الكسر فى النصف فان قال فيه كسر فخاتمك فى يمينه وان قال ليس فيه كسر فخاتمك فى يساره ».

ولا حاجة الى تعليل المسالتين الاخيرتين ففي الاولى يستغل حقيقة جبرية ظاهرة وفى الثانية يستغل الاعداد الفردية والزوجية بشكل ذى طرافة .

★ ★ ★